Ime in priimek

Diskretne strukture: drugi izpit - računski del

7. februar 2022

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja je **90 minut**.
Dovoljena je uporaba **1 lista A4 formata** s formulami.
Za pozitivno oceno je potrebno zbrati **vsaj 50 točk**.
Poskus prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo prepovedani**.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. naloga (25 točk)

Z uporabo matematične indukcije dokaži, da je za vsako naravno število $n > 0$ izraz $6^n - 1$ deljiv s 5.

RADI BI VIDELI, DA JE ZA VSAK $n > 0$ IZRAZ $\boxed{6^n - 1 = 5k}$ ZA NEK $k \in \mathbb{Z}$.

5

1. $\boxed{\text{BAZA}}$ $n = 1 \Rightarrow 6^1 - 1 = 5 = 5 \cdot 1$ ✓

5

2. $\boxed{\text{INDUKCIJSKI KORAK}}$

Predpostavimo: $6^n - 1 = 5k$, $k \in \mathbb{Z}$

Dokazujemo: $6^{n+1} - 1 = 5l$, $l \in \mathbb{Z}$

5

Računamo:
$$6^{n+1} - 1 = 6^n \cdot 6^1 - 1 =$$
$$= \underbrace{6^n - 1}_{\text{IP}} + 5 \cdot 6^n =$$
$$= 5 \cdot k + 5 \cdot 6^n =$$
$$= 5 \underbrace{(k + 6^n)}_{l \in \mathbb{Z}}$$ ✓

10

2. naloga (25 točk)

a) (13 točk) Dokaži, da je naslednji sklep **pravilen**.

$$\neg t \lor s,\quad q \Rightarrow t,\quad r \lor \neg s \Rightarrow \neg p \quad \models \quad p \land q \Rightarrow \neg r \land t\,.$$

1.	$\neg t \lor s$	Predpostavka 1	1
2.	$q \Rightarrow t$	Predpostavka 2	1
3.	$r \lor \neg s \Rightarrow \neg p$	Predpostavka 3	1
4.1	$p \land q$	PS	2
4.2	p	Po (4.1)	1
4.3	q	Po (4.1)	1
4.4	$\neg(r \lor \neg s)$	MT (3, 4.2)	1
4.5	$\neg r \land s$	$\sim$ (4.4)	1
4.6	$\neg r$	Po (4.5)	1
4.7	t	MP (2, 4.3)	1
4.8	$\neg r \land t$	Zd (4.6, 4.7)	1
4.	$p \land q \Rightarrow \neg r \land t$	PS (4.1, 4.8)	1

b) (12 točk) Dokaži, da naslednji sklep **ni pravilen**, tako da poiščeš protiprimer.

$$p \lor (q \land r),\quad \neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t),\quad p \Leftrightarrow r \quad \models \quad t \Rightarrow s\,.$$

2

$p \lor (q \land r) \sim 1$

$\neg s \Rightarrow (p \Rightarrow t) \sim 1$

$p \Leftrightarrow r \sim 1$

$t \Rightarrow s \sim 0$

$\boxed{t \sim 1}$ $\boxed{s \sim 0}$

$\neg 0 \Rightarrow (p \Rightarrow 1) \sim 1 \Rightarrow 1$

~ 1 za vsak p

1. $\boxed{p \sim 1}$

$1 \Leftrightarrow r \sim 1$ $\boxed{r \sim 1}$

$1 \lor (q \land 1) \sim 1$ za vsak q

$\boxed{q \sim 0}$ ali $\boxed{q \sim 1}$

2. $\cancel{\boxed{p \sim 0}}$

$0 \Leftrightarrow r \sim 1$

$\boxed{r \sim 0}$

$\cancel{0 \lor (q \land 0) \sim 0}$

2 PROTIPRIMERA: $p \sim 1$, $r \sim 1$, $s \sim 0$, $t \sim 1$ (2, 2, 2, 2)

$q \sim 1$ ali $q \sim 0$ (2)

3. naloga (25 točk)

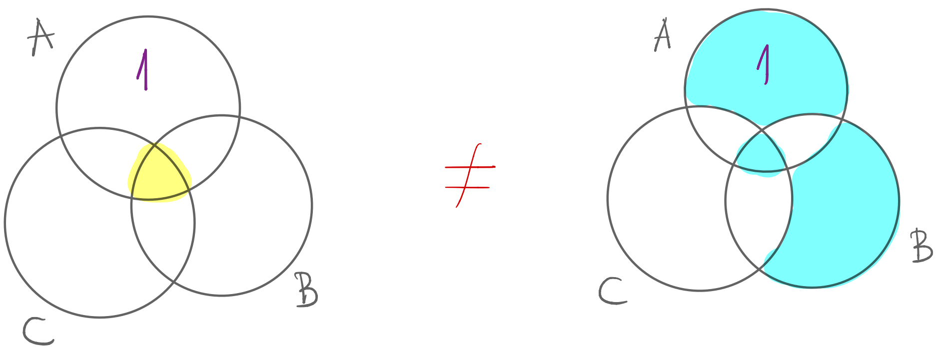
a) (15 točk) Dokaži spodnjo enakost z množicami.

$$(A + B) \cup (A \cup B)^c = (A \cap B)^c\,.$$

$$
\begin{aligned}
(A+B)\cup(A\cup B)^c &\overset{13.}{=} ((A\cup B)\setminus(A\cap B))\cup(A\cup B)^c = && 2\\
&\overset{12.}{=} ((A\cup B)\cap(A\cap B)^c)\cup(A\cup B)^c = && 2\\
&\overset{6.}{=} (\underbrace{(A\cup B)\cup(A\cup B)^c}_{S})\cap((A\cap B)^c\cup(A\cup B)^c) = && 2\\
&\overset{9.}{=} S \cap ((A\cap B)^c \cup (A\cup B)^c) = && 2\\
&\overset{10.}{=} (A\cap B)^c \cup (A\cup B)^c = && 2\\
&\overset{7.}{=} ((A\cap B)\cap(A\cup B))^c = && 2\\
&\overset{6.}{=} ((A\cap B\cap A)\cup(A\cap B\cap B))^c = && 2\\
&\overset{2.}{=} ((A\cap B)\cup(A\cap B))^c = (A\cap B)^c && 1
\end{aligned}
$$

b) (10 točk) Ovrzi spodnjo enakost z množicami, tako da poiščeš protiprimer.

$$A \cap B \cap C = (A \cap B) + ((A \cup B) \setminus C)\,.$$



3

PROTIPRIMER: $A = \{1\}$ 1

$B = C = \emptyset$ 2

$L = \{1\} \cap \emptyset \cap \emptyset = \emptyset$ 2

$\neq$

$D = (\{1\} \cap \emptyset) + ((\{1\} \cup \emptyset) \setminus \emptyset) = \emptyset + \{1\} = \{1\}$ 2

4. naloga (25 točk)

Dana je linearna diofantska enačba $858x + 253y = 33$.

a) (15 točk) Z uporabo razširjenega Evklidovega algoritma poiščite $\gcd(858, 253)$.

I	$1 \cdot 858 + 0 \cdot 253 = 858$	2	
II	$0 \cdot 858 + 1 \cdot 253 = 253$	2	$858 = 3 \cdot 253 + 99$
III = I − 3·II	$1 \cdot 858 + (-3) \cdot 253 = 99$	2	$253 = 2 \cdot 99 + 55$
IV = II − 2·III	$-2 \cdot 858 + 7 \cdot 253 = 55$	2	$99 = 1 \cdot 55 + 44$
V = III − IV	$3 \cdot 858 + (-10) \cdot 253 = 44$	2	$55 = 1 \cdot 44 + 11$
VI = IV − V	$-5 \cdot 858 + 17 \cdot 253 = 11$	2	$44 = 4 \cdot 11 + 0$
VII = V − 4·VI	$23 \cdot 858 + (-78) \cdot 253 = 0$	2	

$\gcd(858, 253) = 11$ 1

b) (10 točk) Poiščite vse rešitve dane linearne diofantske enačbe.

KER $\gcd(858, 253) = 11$ deli 33, dana LDE ima rešitve.

$-5 \cdot 858 + 17 \cdot 253 = 11 \quad / \cdot 3$

$-15 \cdot 858 + 51 \cdot 253 = 33$ 3

SPLOŠNO REŠITEV DOBIMO TAKO:

$33 = 33 + t \cdot 0$

$33 = -15 \cdot 858 + 51 \cdot 253 + t \cdot (23 \cdot 858 + (-78) \cdot 253)$ 4

$33 = (-15 + 23 \cdot t) \cdot 858 + (51 - 78t) \cdot 253$

SPLOŠNA REŠITEV: $(x_t, y_t) = (-15 + 23t, 51 - 78 \cdot t)$, $t \in \mathbb{Z}$ 3
(vse rešitve)