Diskretne strukture VSP: poskusni kolokvij

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 2 listov A4 formata s formulami. Uporaba elektronskih pripomočkov ni dovoljena.

Vse odgovore dobro utemelji!

1	
2	
3	
4	
Σ	

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

Z uporabo matematične indukcije utemelji, da za vsako naravno število $n > 0$ velja:

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}.$$

Baza indukcije:
Vstavimo $n = 1$ in dobimo

$L = \frac{1}{3}$,
$D = \frac{3}{4} - \frac{2+3}{4 \cdot 3} = \frac{9-5}{12} = \frac{1}{3}$.

Ker je $L = D$, baza velja.

Indukcijski korak:
Naj bo n poljubno naravno število.
Predpostavimo

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} = \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n}$$

in dokazujemo

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} = \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n+1}}.$$

Uporabimo indukcijsko predpostavko in izračunamo

$$\begin{aligned}
\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{3}{3^3} + \ldots + \frac{n}{3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} &= \frac{3}{4} - \frac{2n+3}{4 \cdot 3^n} + \frac{n+1}{3^{n+1}} && (1)\\
&= \frac{3}{4} - \frac{3(2n+3) - 4(n+1)}{4 \cdot 3^{n+1}} && (2)\\
&= \frac{3}{4} - \frac{6n+9-4n-4}{4 \cdot 3^{n+1}} && (3)\\
&= \frac{3}{4} - \frac{2n+5}{4 \cdot 3^{n+1}}. && (4)
\end{aligned}$$

- Baza: **3 točke**.
- Indukcijski korak:
  za zapis indukcijske predpostavke dobite **3 točke**,
  za zapis enakosti, ki jo je potrebno dokazati **4 točke**,
  za vrstico (1) **5 točk**,
  za vrstici (2) in (3) **5 točk**,
  za vrstico (4) **5 točk**.

2. naloga (25 točk)

Naj bo $\downarrow$ dvomestni veznik, definiran s predpisom $p \downarrow q \equiv \neg(p \vee q)$.

a) (10 točk) Preveri pravilnost spodnjega sklepa

$$\neg q, \ \ \neg(p \downarrow q)\,, \ \ r \Rightarrow \neg p \quad \models \ \neg r.$$

Prvi način:

1.	$\neg q$	predpostavka
2.	$\neg(p \downarrow q)$	predpostavka
3.	$r \Rightarrow \neg p$	predpostavka
4.	$\neg(\neg(p \vee q))$	$\sim$ (2)
5.	$p \vee q$	$\sim$ (4)
6.	p	DS(1,5)
7.	$\neg r$	MT(3,6)

- vrstice 1-3: **2 točki**,
- vrstica 4: **2 točki**,
- vrstica 5: **2 točki**,
- vrstica 6: **2 točki**,
- vrstica 7: **2 točki**

Drugi način (sklep s protislovjem):

1.	$\neg q$	predpostavka
2.	$\neg(p \downarrow q)$	predpostavka
3.	$r \Rightarrow \neg p$	predpostavka
4.	$\neg(\neg(p \vee q))$	$\sim$ (2)
5.	$p \vee q$	$\sim$ (4)
6.1	r	predpostavka RA
6.2	$\neg p$	MP(3,6.1)
6.3	q	DS(5,6.2)
6.4	$q \wedge \neg q$	Zd(1,6.3)
6.5	0	$\sim$ (6.4)
6.	$\neg r$	RA(6.1,6.5)

- vrstice 1-3: **2 točki**,
- vrstice 4, 5, 6.1-6.5, 6: vsaka po **1 točko**

b) (10 točk) Ali je nabor $\{\downarrow\}$ poln nabor izjavnih veznikov? Če je odgovor da, to dokaži, sicer pa poišči protiprimer.

Nabor $\{\downarrow\}$ je poln nabor izjavnih veznikov.
Dokaz:
Prvi način:
Vemo, da je nabor $\{\neg, \vee\}$ poln nabor izjavnih veznikov. Zato je dovolj, da izrazimo $\neg$ in $\vee$ z $\downarrow$.
Negacijo izpeljemo tako: $\neg p \sim \neg(p \vee p) \sim p \downarrow p$.
Opazimo, da je $p \vee q \sim \neg\neg(p \vee q) \sim \neg(p \downarrow q)$.
Sedaj disjunkcijo zapišemo tako: $p \vee q \sim (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
Drugi način:
Vemo, da je nabor $\{\neg, \wedge\}$ poln nabor izjavnih veznikov. Zato je dovolj, da izrazimo $\neg$ in $\wedge$ z $\downarrow$.
Negacijo izpeljemo tako: $\neg p \sim \neg(p \vee p) \sim p \downarrow p$.
Opazimo, da je $p \downarrow q \sim \neg(p \vee q) \sim \neg p \wedge \neg q$.
Sedaj konjunkcijo zapišemo tako: $p \wedge q \sim (p \downarrow p) \downarrow (q \downarrow q)$.

- Če ugotovite, da je potrebno dokazati, da je $\{\downarrow\}$ poln nabor izjavnih veznikov (ne ohranja 0 in 1), dobite **2 točki**.
- Če izrazite negacijo z $\{\downarrow\}$, dobite **4 točke**.
- Če izrazite disjunkcijo ali konjunkcijo z $\{\downarrow\}$, dobite **4 točke**.

c) (5 točk) Z veznikom $\downarrow$ izrazi implikacijo.

Vemo že, da je $\neg p \sim p \downarrow p$ in $p \vee q \sim (p \downarrow q) \downarrow (p \downarrow q)$.
Upoštevamo še, da je $p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$.
Dobimo $p \Rightarrow q \sim ((p \downarrow p) \downarrow q) \downarrow ((p \downarrow p) \downarrow q)$.

- Za zapis enakovrednosti $p \Rightarrow q \sim \neg p \vee q$ dobite **1 točko**.
- Za zapis implikacije le z uporabo veznika $\downarrow$ dobite **4 točke**.

3. naloga (25 točk)

Ali sta izjavni formuli

$$\forall x(P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge R(x)))$$

in

$$\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x(P(x) \Rightarrow R(x))$$

enakovredni? Utemelji.

Izjavni formuli sta enakovredni, kar dokažemo z uporabo zakonov predikatnega računa.

$$\begin{aligned}
\forall x(P(x) \Rightarrow (Q(x) \wedge R(x))) &\sim \forall x(\neg P(x) \vee (Q(x) \wedge R(x))) && (5)\\
&\sim \forall x((\neg P(x) \vee Q(x)) \wedge (\neg P(x) \vee R(x))) && (6)\\
&\sim \forall x((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge (P(x) \Rightarrow R(x))) && (7)\\
&\sim \forall x((P(x) \Rightarrow Q(x)) \wedge \forall x((P(x) \Rightarrow R(x)) && (8)
\end{aligned}$$

- vrstica (5): **6 točk**,
- vrstica (6): **6 točk**,
- vrstica (7): **6 točk**,
- vrstica (8): **7 točk**

4. naloga (25 točk)

- **(3+3 točke)** Razložite pojma potenčna množica in kartezični produkt množic.

  Pravilna razlaga pojma potenčna množica je katerakoli od naslednjih:

  - Potenčna množica množice je množica vseh njenih podmnožic.
  - Potenčna množica množice A je množica $\mathcal{P}(A) = \{B \colon B \subseteq A\}$.

  Pravilna razlaga pojma kartezični produkt je katerakoli od naslednjih:

  - Kartezični produkt množic A in B je množica vseh urejenih parov (a, b), kjer je $a \in A$ in $b \in B$.
  - Kartezični produkt množic A in B je množica $A \times B = \{(a, b) \colon a \in A, b \in B\}$.

  - Če je razvidno, da sta definicijsko območje in zaloga vrednosti operacije potenčna množica množici, dobite **1 točko**. Za pravilno definicijo dobite še **2 točki**.
  - Če je razvidno, da operacija kartezični produkt kot argumenta potrebuje dve množici, zaloga vrednosti pa je množica, dobite **1 točko**. Za pravilno definicijo dobite še **2 točki**.

- **(3+3 točke)** Razložite, kaj pomeni, da je kartezični produkt distributiven čez unijo? Dokažite eno od vsebovanosti.

  Naj bodo A, B, C tri množice. Velja naslednja enakost množic

  $$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C). \tag{9}$$

  Vsebovanost ($\subseteq$) sledi iz premisleka, ki ga lahko zapišemo v eni od naslednjih oblik:

  - Naj bo (x, y) poljuben element iz $A \times (B \cup C)$. Po definiciji $\times$ to pomeni $x \in A$ in $y \in B \cup C$. Torej $y \in B$ ali $y \in C$. V prvem primeru $(x, y) \in A \times B$, v drugem pa $(x, y) \in A \times C$.
  - $(x, y) \in A \times (B \cup C) \Rightarrow x \in A \wedge y \in B \cup C \Rightarrow x \in A \wedge (y \in B \vee y \in C) \Rightarrow (x \in A \wedge y \in B) \vee (x \in A \wedge y \in B) \Rightarrow x \in (A \times B) \cup (A \times C)$.

  Vsebovanost ($\supseteq$) sledi iz premisleka, ki ga lahko zapišemo v eni od naslednjih oblik:

  - Ker sta množici $A \times B$ in $A \times C$ obe vsebovani v $A \times (B \cup C)$, je tudi njuna unija vsebovana v $A \times (B \cup C)$.
  - Iz $A \times B \subseteq A \times (B \cup C)$ in $A \times C \subseteq A \times (B \cup C)$ sledi $(A \times B) \cup (A \times C) \subseteq A \times (B \cup C)$.

  - Če ste izbrali 3 množice in poskusili izpeljati neko enakost, ki povezuje $\times$ in $\cup$, niste pa navedli pravilne enakosti (9), dobite **1 točko**.
  - Za (9) dobite **3 točke**.
  - Za dokaz katerekoli od vsebovanosti ($\subseteq$) in ($\supseteq$) na enega od načinov navedenih zgoraj, dobite **3 točke**.

- Naj bo A množica vseh 2-mestnih izjavnih veznikov.

  - **(6 točk)** Napišite en element iz množice $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$, ki ni enak $\emptyset$ ali $A \times \mathcal{P}(A)$.

    Elementi množic A, $\mathcal{P}(A)$, $A \times \mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$ so:

    * $A : \wedge, \vee, \Rightarrow, \Leftrightarrow, \ldots$
    * $\mathcal{P}(A) : \emptyset, \{\wedge\}, \{\vee\}, \{\Rightarrow\}, \ldots, \{\wedge, \vee\}, \ldots, \{\wedge, \vee, \Rightarrow\}, \ldots$
    * $A \times \mathcal{P}(A) : (\wedge, \emptyset), (\vee, \emptyset), \ldots, (\wedge, \{\wedge\}), \ldots, (\vee, \{\wedge, \vee\}) \ldots$

* $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A)) : \emptyset, \{(\wedge, \emptyset)\}, \{(\wedge, \{\wedge\})\}, \ldots, \{(\wedge, \emptyset), (\Rightarrow, \{\wedge, \vee\})\}, \ldots, A \times \mathcal{P}(A)$.

* Za katerikoli element iz $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$, ki ni $\emptyset$ ali $A \times \mathcal{P}(A)$, dobite **6 točk**.
* Če elementa iz $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$, ki ni $\emptyset$ ali $A \times \mathcal{P}(A)$, niste navedli, ste pa navedli element iz $A \times \mathcal{P}(A)$ in napisali, da pripada $A \times \mathcal{P}(A)$, dobite **4 točke**.
* Če elementa iz $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$ in $A \times \mathcal{P}(A)$ niste navedli, ste pa navedli element iz A in napisali, da pripada A, dobite **1 točko**. Če ste navedli še element iz $\mathcal{P}(A)$ in napisali, da pripada $\mathcal{P}(A)$, dobite še **1 točko**.

– **(7 točk)** Koliko elementov ima množica $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$? Število napišite s formulo in ga ni potrebno izračunati.

Množice A, $\mathcal{P}(A)$, $A \times \mathcal{P}(A)$ in $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$ imajo:

* $A : 2^{2^2} = 2^4 = 16$ elementov.
* $\mathcal{P}(A) : 2^{16}$ elementov.
* $A \times \mathcal{P}(A) : 16 \cdot 2^{16} = 2^4 \cdot 2^{16} = 2^{20}$ elementov.
* $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A)) : 2^{16 \cdot 2^{16}} = 2^{2^{20}}$ elementov.

* Za pravilen izračun števila elementov A dobite **2 točki**.
* Za pravilen izračun števila elementov $\mathcal{P}(A)$ dobite **2 točki**.
* Za pravilen izračun števila elementov $A \times \mathcal{P}(A)$ dobite **1 točko**, pri čemer sta oba odgovora $16 \cdot 2^{16}$ in 2^{20} sprejemljiva.
* Za pravilen izračun števila elementov $\mathcal{P}(A \times \mathcal{P}(A))$ dobite **2 točki**, pri čemer sta oba odgovora $2^{16 \cdot 2^{16}}$ in $2^{2^{20}}$ sprejemljiva.