

## Izpit iz Matematike 23.1.2014

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

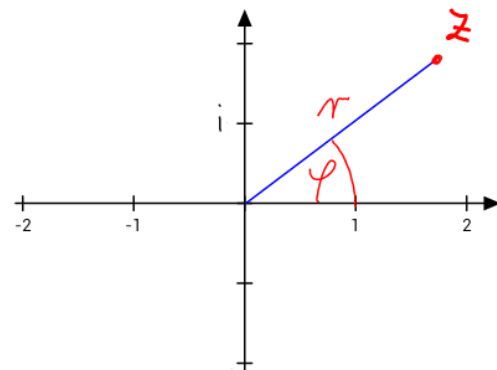
### 1. [20 točk] Kompleksna števila

(a) Kaj je polarni zapis kompleksnega števila  $z = x + iy$ ? Narišite sliko in napišite, kako se polarni koordinati izražata s kartezičnima.

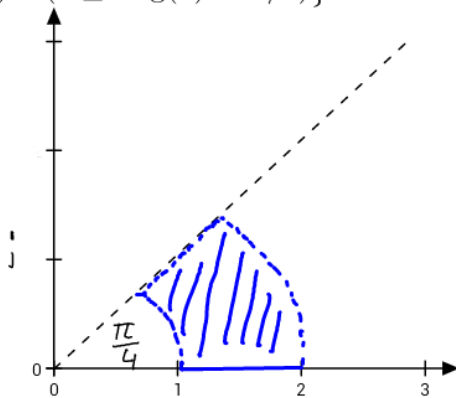
$$z = r \cdot e^{i\varphi}$$

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

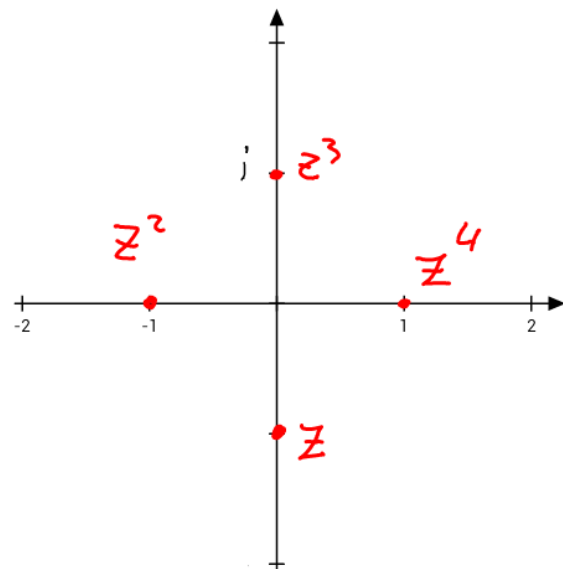


(b) V kompleksni ravnini skicirajte območje  $\{z \in \mathbb{C} \mid (1 < |z| < 2) \wedge (0 \leq \text{Arg}(z) < \pi/4)\}$ .



(c) V kompleksni ravnini narišite število  $z = -i$  in ga zapišite v polarni obliki.

$$z = e^{-i \frac{\pi}{2}} = e^{i \frac{3\pi}{2}}$$



(d) Na prejšnji sliki skicirajte tudi števila  $z^2$ ,  $z^3$  in  $z^4$ .

$$z^2 = -1$$

$$z^4 = 1$$

$$z^3 = i$$

2. [20 točk] Odvodi

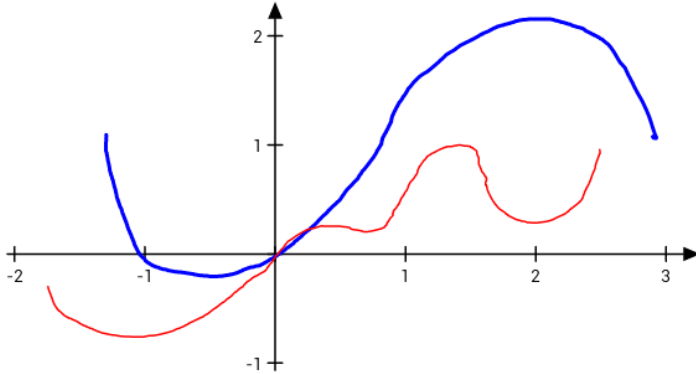
(a) Zapišite definicijo odvoda funkcije  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  v točki  $x_0$ .

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

(b) Kaj je tangenta na graf funkcije  $f$  v točki  $x_0$  in kakšna je njena zveza z odvodom?

Tangenta v  $x_0$  je premica, ki se v  $(x_0, f(x_0))$  dotika grafa funkcije. Njen naklon je  $f'(x_0)$ .

(c) Narišite graf poljubne funkcije  $g$ , ki zadošča pogojem:  $g(0) = 0$ ,  $g'(1) > 1$ ,  $g''(-1) > 0$ ,  $g'(2) = 0$ . Omenjeni pogoji morajo biti na grafu dobro razvidni.



Dva primera

(d) Kaj pomeni, da je funkcija konveksna na intervalu  $(a, b)$ ?

$f'(x) > 0$  na  $(a, b)$  / tangenta je na  $(a, b)$  v okolici dotikaljšča pod grafom funkcije (sekanta pa nad)

→ oblika grafa ukričjena navzgor

3. [20 točk] Integrali

(a) Definirajte nedoločeni integral zvezne funkcije  $f$ .

$$\int f(x) dx \text{ je funkcija } F(x) \Leftrightarrow F'(x) = f(x)$$

(b) Opišite povezavo med določenim in nedoločenim integralom.

$$\int_a^b f(x) = F(b) - F(a), \text{ kjer je } \int f(x) dx = F(x) + C$$

(c) Definirajte povprečno vrednost zvezne funkcije  $f$  na intervalu  $[a, b]$ .

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(d) Opišite povezavo med določenim integralom  $\int_a^b f(x) dx$  zvezne funkcije  $f$  ter območjem, ki ga omejujeta graf funkcije  $f$  ter os  $x$  na intervalu  $[a, b]$ .

$$\int_a^b f(x) dx = A_1 - A_2$$

$A_1 =$  ploščina omenjenega območja nad osjo  $x$ .

$A_2 =$  ploščina omenjenega območja pod osjo  $x$ .

4. [20 točk] Vektorji

- (a) Produkt vektorja  $\vec{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$  s številom  $a$  je enak  $\begin{bmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ ax_3 \end{bmatrix}$ .  
 Dolžina vektorja  $\vec{x}$  je enaka  $\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ .

- (b) Koliko je enotskih vektorjev, ki so pravokotni na vektorja  $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$  in  $\vec{b} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ?  
2.  
 Določite ga/ju/jih.

$$\pm \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \pm \frac{\vec{a} \times \vec{b}}{\|\vec{a} \times \vec{b}\|}$$

V  $\mathbb{R}^3$  naj bosta podani ravnina  $\Sigma : x - 2y - 3z = 14$  ter premica  $p$ , določena z enačbo  $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{3}$ .

- (c) Določite takšna  $a$  in  $b$ , da bo premica  $p$  prebadala ravnino  $\Sigma$  pravokotno.

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ 3 \end{bmatrix} \parallel \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} a = -1 \\ b = 2 \end{matrix}$$

- (d) Določite nek enotski vektor, ki je pravokoten na premico  $p$ .

npr.:  $\frac{1}{\sqrt{5}} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ , saj je enotski, skalarni produkt s smernim vektorjem premice pa je 0.

5. [20 točk] Matrike

Naj bo  $A = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 5 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$ ,  $C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$  in  $a = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 15 \end{bmatrix}$ .

(a) Izračunajte tiste izraze, ki jih je mogoče izračunati:  ~~$A+B$~~ ,  ~~$B+C$~~ ,  ~~$B+2A^T$~~ ,  ~~$C-2B^T$~~ .

$$C - 2B^T = \begin{bmatrix} -3 & 2 & -7 \\ 3 & -2 & 0 \end{bmatrix}$$

(b) Izračunajte tiste izraze, ki jih je mogoče izračunati:  ~~$A/B$~~ ,  ~~$A \cdot B^T$~~ ,  $B \cdot C$ ,  ~~$B \cdot C^T$~~ .

$$B \cdot C = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 1 & 0 & 0 \\ 3 & 6 & -3 \end{bmatrix}$$

(c) Koliko rešitev ima sistem enačb  $Ax = a$ ?

Neskončno: Ko razpišemo rešitev dobimo eno prosto spremenljivko.

(d) Izračunajte tisto determinanto, ki obstaja:  ~~$\det(B)$~~ ,  ~~$\det(C)$~~ ,  ~~$\det(C \cdot B)$~~ .

ništa kvadratni

$$|CB| = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$