

Izpit iz Matematike

7.2.2014

- Čas pisanja: **45 minut**
- Vse rezultate zapišite na ta papir, pomožni izračuni z utemeljitvijo morajo biti priloženi.
- Vsi deli nalog so enakovredni.
- Prepisovanje, pogovarjanje in uporaba knjig, zapiskov, prenosnega telefona in drugih pripomočkov je **strogo** prepovedano.

1. [20 točk] Zaporedja in vrste

(a) Kdaj je zaporedje navzgor omejeno?

Takrat, ko obstaja število, ki je večje od vseh členov zaporedja. $\exists M \in \mathbb{R} : M > a_n, \forall n.$

(b) Ali je vsako konvergentno zaporedje omejeno? Ali je vsako omejeno zaporedje konvergentno?

Vsako konvergentno zaporedje je omejeno.
Ni pa vsako omejeno zaporedje konvergentno.

(c) Zapišite geometrijsko vrsto s kvocientom q .

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n$$

(d) Za katere vrednosti q je geometrijska vrsta konvergentna in kolikšna je v tem primeru vsota?

konvergira natanko za $|q| < 1.$

Vsota je $\frac{a_0}{1-q}$

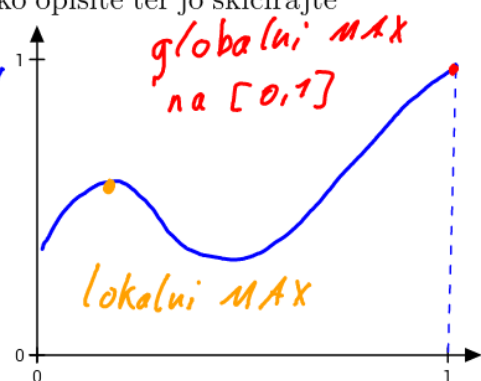
2. [20 točk] Odvodi

(a) Kako izračunamo približek z diferencialom?

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$$

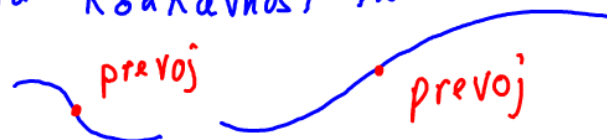
(b) Naj bo $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ zvezna odvedljiva funkcija. Kakšna je razlika med globalnim maksimumom ter lokalnim maksimumom funkcije f ? Razliko opišite ter jo skicirajte na primeru.

x_0 je globalni (lokalni) maksimum, če je $f(x_0)$ največja vrednost, ki jo f doseže na definicijskem območju (oziroma na okolici x_0).



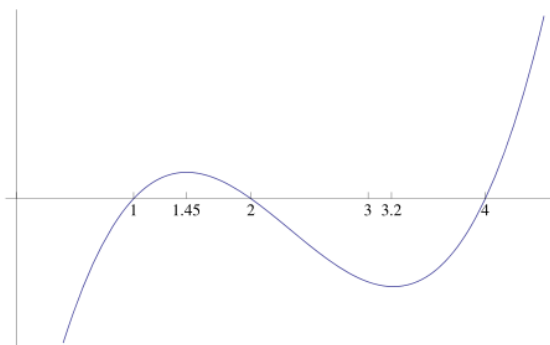
(c) Kaj je (računsko in grafično) prevoj?

Točka, v kateri se zamenjata konkavnost in konveksnost. Pogoj: $f''(x) = 0$



(d) Za funkcijo f ima njen odvod f' spodnji graf.

Določite intervale naraščanja in padanja ter prevoje funkcije f .



naraščanje: $[1, 2] \cup [4, \infty)$

padanje: $[-\infty, 1] \cup [2, 4]$

prevoji: 1.45, 3.2

3. [20 točk] Integrali

(a) Zakaj je nedoločeni integral določen le do konstante natančno?

$$(F(x) + c)' = F'(x) \quad \forall F, \forall c \in \mathbb{R}$$

zato sta obe funkciji $(F(x))$ ter $(F(x) + c)$ nedoločena integrala iste funkcije. 2

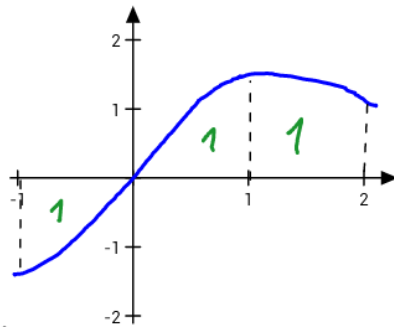
(b) Definirajte povprečno vrednost zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$.

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

(c) Zapišite osnovni izrek integralnega računa.

za $F(x) = \int_a^x f(x) dx$ velja $F'(x) = f(x)$

(d) Skicirajte graf kake funkcije $f: [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, za katero bo veljalo: $\int_{-1}^0 f(x) dx$ je približno -1 , $\int_{-1}^1 f(x) dx$ je približno 0 in $\int_{-1}^2 f(x) dx$ je približno 1 .



Številke predstavljajo približno ploščino likov.

4. [20 točk] Vektorji

(a) Skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ je enak $a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$.

Kot med vektorjema $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$ je enak $\arccos \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|}$.

(b) Koliko je enotskih vektorjev, ki so vzporedni z vektorjem $\vec{a} = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$? 2.

Določite ga/ju/jih.

$$\pm \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(c) Zapišite formulo za razdaljo točke do premice in izračunajte razdaljo od točke $(0, 0, 1)$

do premice s smernim vektorjem $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ skozi točko $(0, 0, 0)$.

$$\frac{\|(\vec{r}_T - \vec{r}_A) \times \vec{e}\|}{\|\vec{e}\|}$$

razdalja je 1

(d) Kako se izračuna mešani produkt in kaj je njegov geometrijski pomen?

$$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Njegova absolutna vrednost je prostornina paralelepipoda, napetega na \vec{a} , \vec{b} in \vec{c} .

5. [20 točk] Matrike

(a) Matriko C bi radi pomnožili z vektorjem $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$, matriko C^T pa z vektorjem $\vec{y} \in \mathbb{R}^4$. Kakšna mora biti velikost matrike C , da bomo to lahko storili?

$$C_{4 \times 3}$$

Podana je matrika $A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) Izračunajte A^2 in A^3 .

$$A^2 = I \quad \text{sledi} \quad A^3 = A$$

(c) Poiščite inverzno matriko matrike A .

iz (b) neposredno sledi

$$A^{-1} = A$$

(d) Naj bo $D = \begin{bmatrix} a & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$. Za katere vrednosti parametra a je matrika D obrnljiva?
za $|\frac{a}{2} \cdot 4| \neq 0$, torej za $a \neq \frac{1}{2}$.