Popravni kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 26. 1. 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Točkovanje: $20 + 30 + 30 + 20$. *Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. **[20 točk]**

   Zaporedje (a_n) ima splošni člen

$$a_n = \frac{n^2 - 1}{-4n^2 + 1}.$$

   (a) Izračunaj limito tega zaporedja, $a = \lim_{n\to\infty} a_n$.

   (b) Od katerega indeksa n dalje so vsi členi tega zaporedja za manj kot $1/64$ oddaljeni od limite a?

   Rešitev

   (a) Limita zaporedja je enaka

$$\lim_{n\to\infty} a_n = -\frac{1}{4}.$$

   (b) Označimo z $a = lim_{n\to\infty} a_n$. Poiskati moramo n od katerega naprej velja

$$-\varepsilon < |a_n - a| < \epsilon$$

$$-\varepsilon < \left| \frac{n^2 - 1}{-4n^2 + 1} - -\frac{1}{4} \right| < \varepsilon$$

   Ker je

$$a_n - a = \frac{3}{16n^2 - 4} > 0$$

   je dovolj poiskati rešitve neenačbe

$$\frac{3}{16n^2 - 4} < \frac{1}{64}.$$

   Rešitev zgornje neenačbe je

$$n^2 > \frac{49}{4}$$

   oziroma

$$n > \frac{7}{2}.$$

   Ker je $n \in \mathbb{N}$ mora biti $n \geq 4$.

2. **[30 točk]** Dana je funkcija f s predpisom

$$f(x) = \frac{1}{x}\left(x^2 + 4x - 3\right).$$

(a) Za katere vrednosti x je $f(x) \leq 2$?

(b) Poišči tangento na krivuljo v točki $x = 1$.

(c) Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujeta krivulji $y = f(x)$, $y = 2$ in $x = 2$.

Rešitev

(a) Rešiti moramo neenačbo

$$\frac{1}{x}\left(x^2 + 4x - 3\right) \leq 2.$$

Če vse prestavimo na eno stran in damo na skupni imenovalec, dobimo neenačbo

$$\frac{1}{x}\left(x^2 + 2x - 3\right) \leq 0$$
$$\frac{1}{x}(x-1)(x+3) \leq 0$$

in rešitev je

$$x \in (-\infty, -3] \cup (0, 1].$$

(b) Enačba tangente skozi točko dobimo s formulo

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$

Odvod $f(x)$ je enak

$$f'(x) = 1 + \frac{3}{x^2},$$

koeficient tangente je $k = 4$ in $f(1) = 2$. Enačba tangente je torej enaka

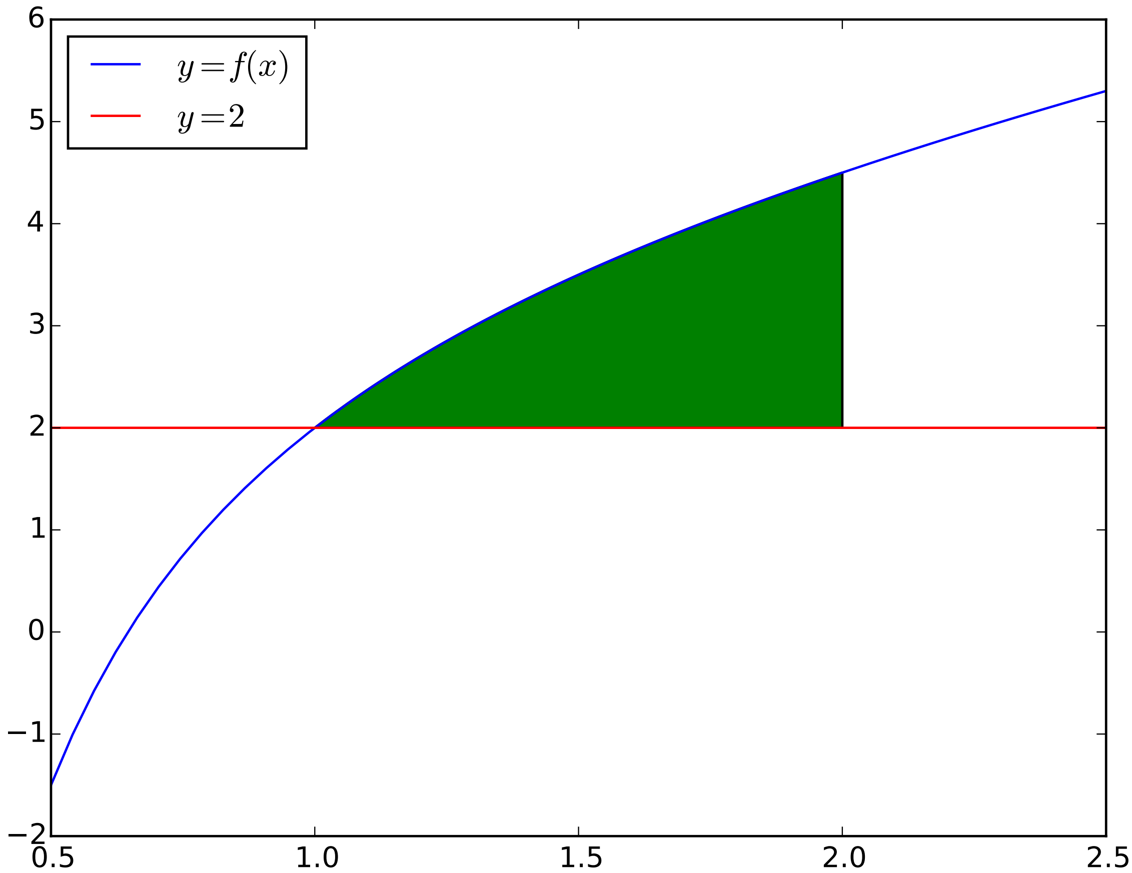
$$y = 4x - 2.$$

(c) Ploščina lika je enaka

$$\int_1^2 -2 + \frac{1}{x}\left(x^2 + 4x - 3\right)\, dx = \int_1^2 x + 2 - \frac{3}{x}\, dx =$$
$$= \left[\frac{x^2}{2} + 2x - 3\log(x)\right]_1^2 = -3\log(2) + \frac{7}{2}.$$

3. **[30 točk]** V prostoru so dane so točke $A(1,2,3)$, $B(-1,1,1)$ in $C(0,3,-1)$.

(a) Poišči enačbo premice p skozi točki A in C.



Slika 1: Lik med grafom $f(x)$, $y = 2$ in $x = 2$

(b) Poišči enačbo ravnine R, ki gre skozi točko B in je pravokotna na vektor $\overrightarrow{AC}$

(c) Poišči presečišče premice p in ravnine R.

(d) Pokaži, da sta točki A in C zrcalni, glede na ravnino R.

Rešitev

(a) Smerni vektor premice p je enak

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}},$$

parametrično enačbo dobimo s formulo

$$\vec{r}_T = \vec{r}_A + t\overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}^{\mathsf{T}}.$$

Oziroma v koordinatah

$$x = 1 - 1t, \quad y = 2 + 1t, \quad z = 3 - 4t.$$

(b) Ravnina, ki je pravokotna na vektor

$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -4 \end{bmatrix}$$

ima enačbo oblike

$$-x + y - 4z = d,$$

in koeficient d določimo tako, da v enačbo vstavimo koordinate točke B in dobimo $d = -2$. Enačba ravnine R se glasi

$$-x + y - 4z = -2.$$

(c) Presečišče ravnine R in premice p dobimo tako, da parametrične enačbe za x, y in z premice p vstavimo v enačbo ravnine

$$-1(-t+1) + 1(t+2) + -4(-4t+3) = 18t - 11 = -2.$$

Dobimo $t = 1/2$. Vrednost t vstavimo v parametrične enačbe premice in dobimo koordniate presečišča

$$P(-t+1, t+2, -4t+3) = P(1/2, 5/2, 1).$$

(d) Ker je vektor $\overrightarrow{AC}$ pravokoten na ravnino R je dovolj pokazati, da je izraz

$$ax + by + cz - d = -x + y - 4z + 2$$

razlikuje le za predznak, če vanj vstavimo koordinate A in C.

$$\begin{aligned} A &: ax + by + cz - d = -9 \\ C &: ax + by + cz - d = 9. \end{aligned}$$

Res, točki A in C sta enako oddaljeni od ravnine R, na nasprotnih straneh in zrcalni sliki.

4. **[20 točk]** Dani sta matriki

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ in vektor } \vec{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

(a) Izračunaj produkt AB.

(b) Poišči rešitev sistema $A\vec{x} = \vec{b}$.

Rečitev

(a) Produkt AB je enak

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(b) Sistem lahko rešimo z gaussovo eliminacijo. Razširjena matrika sistema po eliminaciji postane

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$$

in rešitev dobimo z obratnim vstavljanjem. Zadnja vrstica da enačbo $2z = 0$, iz katere izračunamo $z = 0$. Podobno dobimo še $y = 4$ in $x = 6$.

Vse odgovore dobro utemelji!