1. kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 2. 12. 2015)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Dani sta kompleksni števili $a = 1 + i$ in $b = -1 + i$.

   (a) Zapiši števili a in b v polarni obliki, tj. obliki $re^{i\phi}$.

   (b) Izračunaj $\left(\frac{a}{b}\right)^{2015}$.

   Rešitev: Za poljubno kompleksno število $z = x + iy$ velja

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \text{ in } \tan(\varphi) = \frac{y}{x}.$$

Za število a dobimo $r = \sqrt{2}$ in $\tan(\varphi) = 1$. Polarni kot φ je lahko $\pi/4$ ali pa $5\pi/4$. Ker število a leži v 1. kvadrantu, je $\varphi = \pi/4$. Število a je torej enako

$$a = \sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}.$$

Podobno dobimo, da je

$$b = \sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}.$$

Potenco $(a/b)^{2015}$ izračunamo tako, da vstavimo polarna zapisa za a in b in uporabimo lastnosti potenciranja

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2015} = \left(\frac{\sqrt{2}e^{i\frac{\pi}{4}}}{\sqrt{2}e^{i\frac{3\pi}{4}}}\right)^{2015} = \left(e^{i\frac{\pi}{4}}e^{-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2015} =$$

$$= \left(e^{i\frac{\pi}{4}-i\frac{3\pi}{4}}\right)^{2015} = e^{-2015i\frac{\pi}{2}} = e^{-1007\pi-i\frac{\pi}{2}} =$$

$$= e^{-1008\pi}e^{i\frac{\pi}{2}} = 1 \cdot i = i.$$

2. Zaporedje (a_n) je dano s predpisom

$$a_n = \frac{2^{n+1}}{1+2^n}.$$

(a) Izračunaj limito $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(b) Pokaži, da je zaporedje (a_n) naraščajoče.

Rešitev: Najprej izračunamo limito. Števec in imenovalec delimo z 2^n in dobimo

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2^{n+1}/2^n}{1/2^n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2}{1/2^n+1} = 2.$$

Zaporedje je naraščajoče, če velja $a_{n+1} > a_n$. Vstavimo formulo za a_n v neenačbo in vidimo

$$\begin{aligned} a_{n+1} &> a_n \\ \frac{2^{n+2}}{1+2^{n+1}} &> \frac{2^{n+1}}{1+2^n} \\ 2^{n+2}(1+2^n) &> 2^{n+1}\left(1+2^{n+1}\right) \\ 2(1+2^n) &> 1+2^{n+1} \\ 2+2^{n+1} &> 1+2^{n+1} \\ 2 &> 1, \end{aligned}$$

da nenačba $a_{n+1} > a_n$ vedno velja. Torej je zaporedja naraščajoče.

3. Funkcija f ima predpis $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$.

(a) Določi definicijsko območje D_f funkcije f.

(b) Poišči odvod f' funkcije f.

(c) Poišči enačbo tangente na graf f skozi točko $(\sqrt{3}, f(\sqrt{3}))$.

Rešitev: Funkcija $f(x) = x\sqrt{4-x^2}$ bo definrano povsod, kjer bo izraz pod korenom pozitiven:

$$\begin{aligned} 4-x^2 &\geq 0 \\ 4 &\geq x^2 \\ 2 \geq x &\geq -2 \end{aligned}$$

in $\mathcal{D}_f = [-2, 2]$. Odvod izračunamo s pravilom za produkt in potenco:

$$f'(x) = \left(x(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right)' = (4-x^2)^{\frac{1}{2}} + x\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2x) =$$
$$= \sqrt{4-x^2} - \frac{x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-x^2-x^2}{\sqrt{4-x^2}} = \frac{4-2x^2}{2\sqrt{4-x^2}}.$$

Enačba tangente ima obliko $y = kx + n$, kjer je $k = f'(x_0)$ in n določimo tako, da točka $(x_0, f(x_0))$ leži na tangenti. Izračunamo k

$$f'(\sqrt{3}) = \frac{4-2\cdot 3}{\sqrt{4-3}} = -2.$$

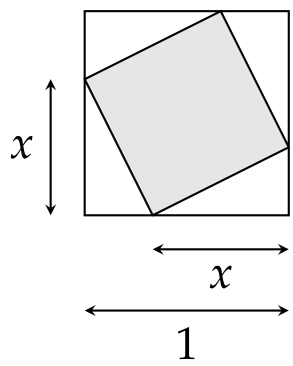
Potrebujemo še $f(x_0) = \sqrt{3}\sqrt{4-3} = \sqrt{3}$. Prosti člen tangente n zadošča enačbi

$$\sqrt{3} = -2\sqrt{3} + n$$

in $n = 3\sqrt{3}$. Enačba tangente je enaka

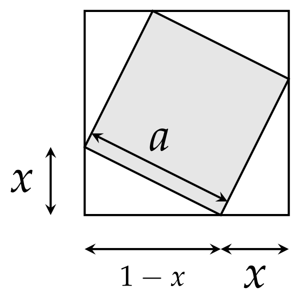
$$y = -2x + 3\sqrt{3}.$$

4. Kvadratu s stranico dolžine 1 včrtamo manjši kvadrat, katerega oglišča ležijo na stranicah prvega kvadrata. Kolikšna je najmanjša možna ploščina včrtanega kvadrata?



(a) Zapiši predpis za funkcijo $p(x)$, ki podaja ploščino včrtanega kvadrata.
(b) Na katerem zaprtem intervalu lahko leži x?
(c) Poišči najmanjšo vrednost funkcije $p(x)$ na tem intervalu.

Rešitev:



Označimo z a stranico notranjega kvadrata. Stranica a je hipotenuza pravokotnega trikotnika s stranicama x in $1-x$.

Po Pitagorovem izreku je $a = \sqrt{x^2 + (1-x)^2}$. Ploščina kvadrata je

$$p(x) = a^2 = x^2 + (1-x)^2.$$

Vrednosti x določa, kjer ima naloga smisel, ležijo na intervalu $[0,1]$. Na robu intervala (za $x = 0$ ali $x = 1$), bosta oba kvadrata sovpadala in ploščina bo takrat največja. Minimalna vrednost bo tako dosežena v notranjosti intervala v stacionarni točki funkcije $p(x)$, kjer je $p'(x) = 0$.

$$p'(x) = 2x - 2(1-x) = 4x - 2 = 0$$

in stacionarna točka je le ena $x = 1/2$. Da je v $x = 1/2$ lokalni minimum lahko ugotovimo, če izračunamo drugi odvod

$$p''(1/2) = 4 > 0.$$

Vrednost $p''(1/2)$ je pozitivna, zato je $x = 1/2$ lokalni minimum. Ker je stacionarna točka le ena, je lokalni minimum tudi globalni minimum. Najmanjša ploščina je tako $p(1/2) = 1/2$.

$\boxed{\textbf{Vse odgovore dobro utemelji!}}$