2. kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 14. 1. 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`*.*

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Funkciji f in g sta dani s predpisoma

$$f(x) = x^3 - 3x + 1 \text{ in } g(x) = x^2 + 3x + 1.$$

(a) Poišči vse točke, v katerih se grafa teh dveh funkcij sekata.

(b) Izračunaj ploščino manjšega od obeh likov, ki ju omejujeta grafa teh funkcij.

Rešitev

(a) Koordinate x presečišč dobimo tako, da rešimo enačbo $f(x) = g(x)$

$$x^3 - x^2 - 6x = 0$$

$$x\,(x-3)\,(x+2) = 0$$

in dobimo

$$x \in \{-2, 0, 3\}.$$

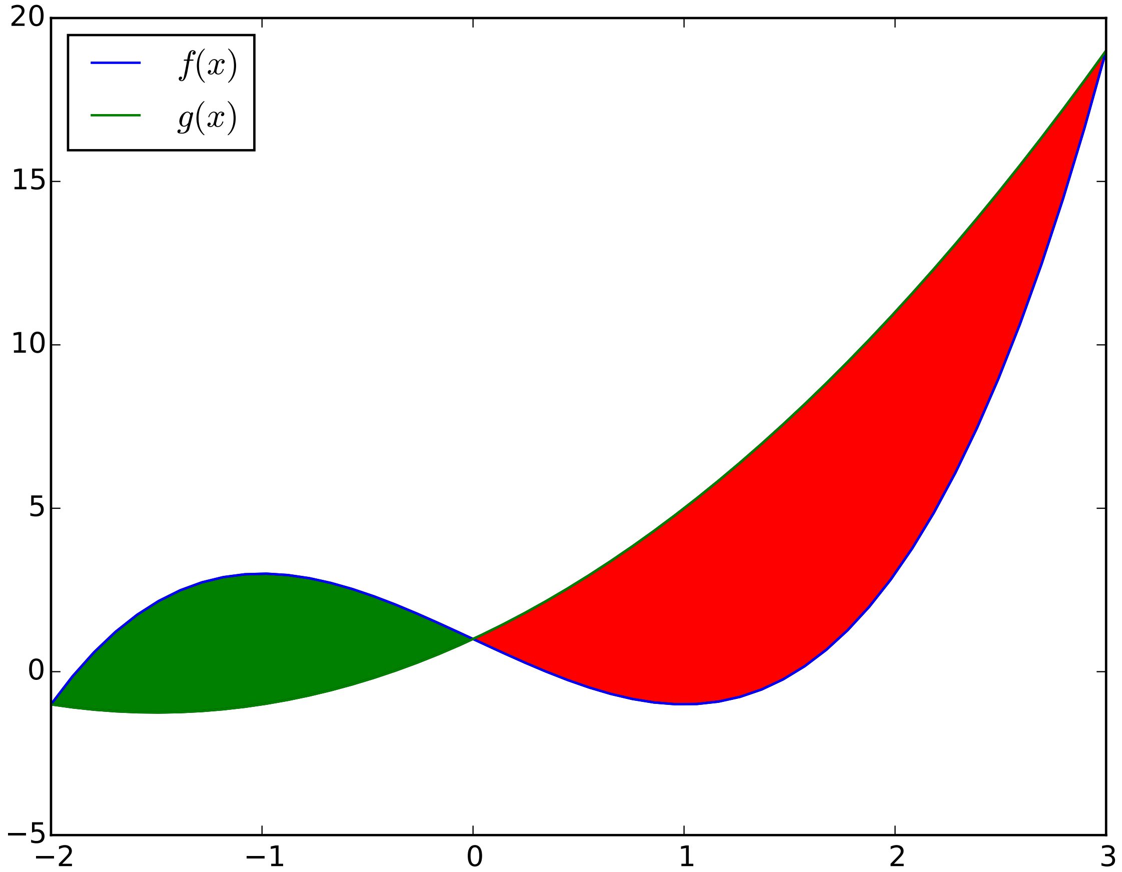
Vrednosti y dobimo, tako da x presečišča vstavimo v funkcijo f ali g. Tako dobimo točke, kjer se grafa sekata $T_0(-2,-1)$, $T_1(0,1)$, $T_2(3,19)$.

(b) Ker ne vemo, kateri lik je manjši, poiščemo ploščino obeh likov.

$$P_1 = \int_{-2}^{0} f(x) - g(x) dx = \int_{-2}^{0} x^3 - x^2 - 6x\, dx = \frac{16}{3}$$

$$P_2 = \int_{0}^{3} g(x) - f(x) dx = \int_{0}^{3} -x^3 + x^2 + 6x\, dx = \frac{63}{4}$$

Manjši je prvi lik. Lika za lažjo predstavo še narišemo



Slika 1: Lika med grafoma $f(x)$ in $g(x)$

2. Izračunaj prostornino telesa, ki ga dobimo, če graf funkcije

$$h(x) = \sqrt{x}e^{-\frac{x^2}{2}}$$

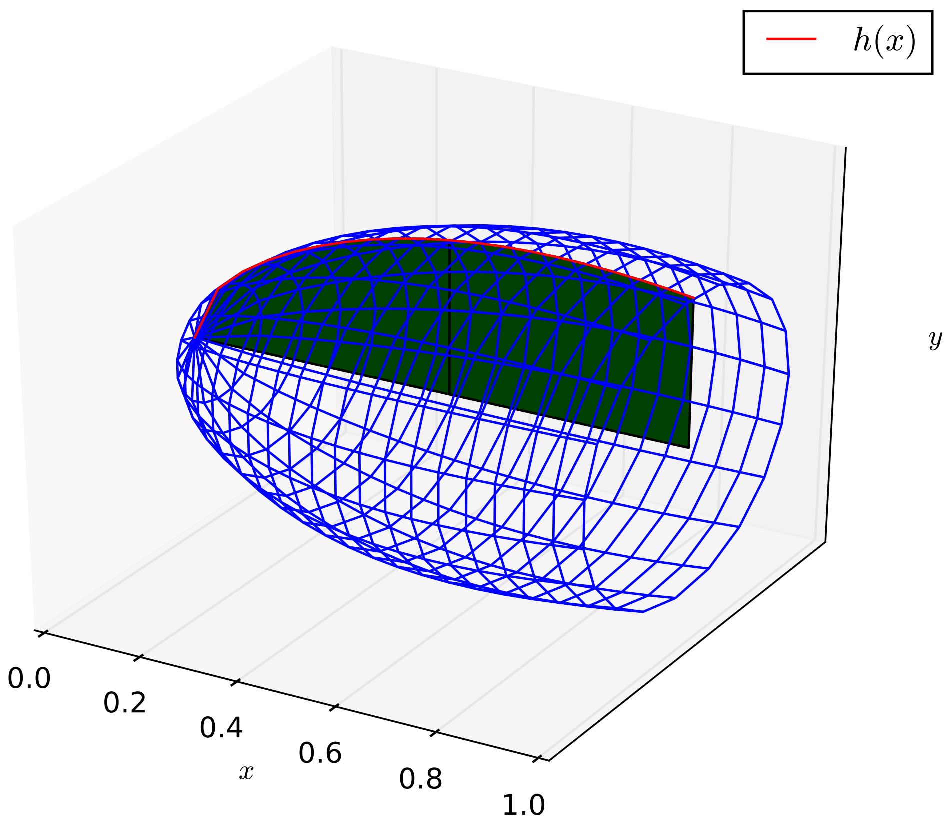
na intervalu $[0, 1]$ zavrtimo okrog x-osi.

Rešitev Za prostornino vrtenine okrog x-osi, lahko uporabimo formulo

$$V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_0^1 h^2(x) dx = \pi \int_0^1 xe^{-x^2} dx.$$

Integral rešimo z vpeljavo nove spremenljivke $t = -x^2$ z diferencialom $dt = -2xdx$

$$V = -\frac{\pi}{2} \int_0^{-1} e^t dt = \left(-\frac{\pi}{2} e^t\right)_0^{-1} = \frac{\pi}{2}\left(1 - \frac{1}{e}\right).$$



Slika 2: Lik, ki ga vrtimo okrog x-osi in vrtenina

3. V prostoru so dane točke $A(1, 3, 2)$, $B(4, 0, 8)$ in $C(4, 2, 6)$.

(a) Pokaži, da te točke ne ležijo na isti premici!

(b) Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

(c) Poišči točko D, na daljici AB, tako da bo $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$.

Rešitev

(a) Najprej preverimo, da točke ne ležijo na isti premici. Točke bodo ležale na isti premici natanko tedaj, ko bosta vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AC}$ kolinearna. Če ju izračunamo

$$\overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = [3, -3, 6]^\mathsf{T}$$
$$\overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = [3, -1, 4]^\mathsf{T},$$

lahko hitro vidimo, da vektorja nista kolinearna, saj velja

$$3 : 3 \neq -1 : -3 \neq 4 : 6.$$

(b) Ploščino trikotnika lahko izračunamo z vektorskim produktom

$$P_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \left\| \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \right\| = \frac{1}{2} \left\| [-6, 6, 6]^\mathsf{T} \right\| = 3\sqrt{3}.$$

Dejstvo, da je ploščina trikotnika različna od nič, je tudi dokaz, da točke A, B in C ne ležijo na isti premici.

(c) Točko D poiščemo s projekcijo. Ker mora biti vektor $\overrightarrow{CD} \perp \overrightarrow{AB}$, je vektor $\overrightarrow{AD}$ enak projekciji vektorja $\overrightarrow{AC}$ na vektor $\overrightarrow{AB}$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB}}{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB}} \overrightarrow{AB} = \frac{36}{54} \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

Koordinate točke D lahko preprosto izračunamo kot

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = [3, 1, 6]^\mathsf{T}$$

in $D(3, 1, 6)$.

4. Dane so točke $A(1,2,1)$, $B(1,-1,2)$ in $C(1,1,3)$ ter ravnina

$$\Sigma : x - y + 2z = 6.$$

(a) Poišči kanonično enačbo premice p, ki gre skozi A in B.

(b) Katere od točk A, B in C ležijo na ravnini Σ?

(c) Poišči točko P, v kateri se premica p in ravnina Σ sekata.

Rešitev

(a) Za enačbo premice potrebujemo smerni vektor in točko na premici. Smerni vektor je lahko kar vektor $\vec{e} = \overrightarrow{AB} = [0,-3,1]^\mathsf{T}$. Parametrična enačba premice p se glasi

$$\vec{r}_T = \vec{r}_A + t\vec{e} = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + t\begin{bmatrix}0\\-3\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\-3t+2\\t+1\end{bmatrix},$$

kanonično obliko pa dobimo, če izrazimo parameter t

$$t = \frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1},$$

enačbo za x pa zapišemo posebej, saj je prva komponenta smernega vektorja $e_1 = 0$. Kanonična enačba premice p se glasi:

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{z-1}{1}; \quad x = 1$$

(b) Katere točke ležijo v ravnini Σ enostavno preverimo tako, da v enačbo ravnine vstavimo koordinate točk A, B in C.

$$\begin{aligned}
A &: \quad 1 + (-2) + 2 = 1; \quad \text{ne leži}\\
B &: \quad 1 + 1 + 4 = 6; \quad \text{leži}\\
C &: \quad 1 + (-1) + 6 = 6; \quad \text{leži}
\end{aligned}$$

(c) Presečišče ravnine Σ in premice p je točka B, saj smo ravnokar pokazali, da B leži na ravnini Σ, na premici p pa tudi, saj je p definirana kot premica skozi A in B. Za radovedne, pa le poiščimo presečišče še iz enačb za Σ in p. Najlažje, to storimo s parametrično enačbo premice p, tako da formule za x, y, z vstavimo v enačbo za Σ. Dobimo enačbo za t

$$\begin{aligned} 1(1)+(-1)(-3t+2)+2(t+1) &= 6 \\ 5t+1 &= 6 \\ t &= 1 \end{aligned}$$

in presečišče je

$$P\left(1, \quad -3t+2, \quad t+1\right)\big|_{t=1} = P(1,-1,2)$$

in je zares enako B.