1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika (VSŠ Računalništvo in informatika)
1. izpit, 22. januar 2017

Ime in priimek

Vpisna številka

1. naloga (25 točk)

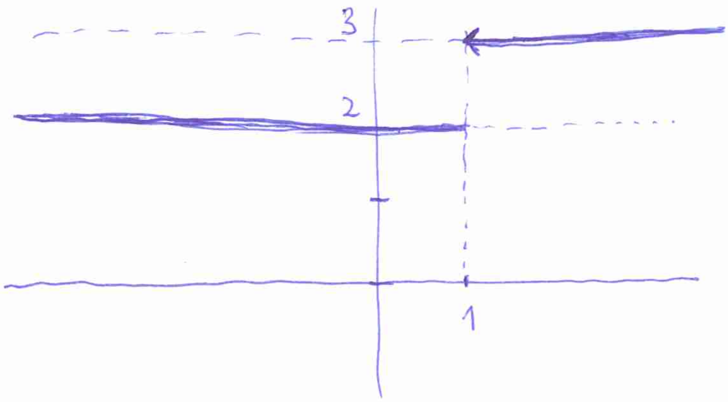
a) (10) Za funkcijo $f(x) = \sqrt{1-x}$ določi njeno definicijsko območje in zalogo vrednosti.

$D_f: 1-x \geq 0 \iff x \leq 1$, torej $D_f = (-\infty, 1]$

Očitno je $Z_f \subseteq [0,\infty)$, ker je $\sqrt{a}$ nenegativno število za vsak $a \geq 0$. Ker za vsak $y \in [0,\infty)$ velja $f(1-y^2) = \sqrt{1-(1-y^2)} = y$, je $Z_f = [0,\infty)$.

b) (5) Skiciraj graf kake funkcije $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ki ni zvezna v točki 1 in za katero velja

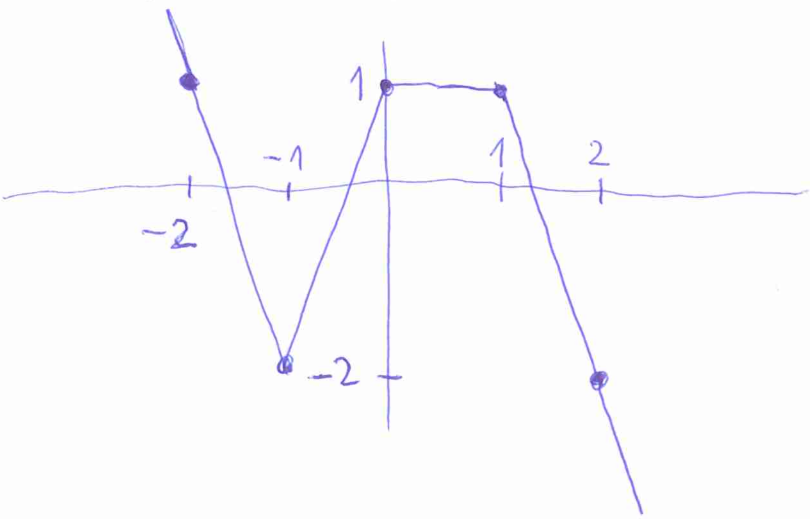
$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 3, \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 2.$$



c) (10) Za zvezno funkcijo $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ velja

$$f(0) = f(1) = f(-2) = 1, f(-1) = f(2) = -2.$$

Nariši primer take funkcije z najmanjšim možnim številom ničel!



2. naloga (25 točk)

a) (5) Kako je definiran odvod funkcije $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ v točki x_0?

$$f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

b) (10) Zapiši pravili za odvod produkta $f(x)g(x)$ in kvocienta $\frac{f(x)}{g(x)}$ odvedljivih funkcij $f(x)$ in $g(x)$.

$$\big(f(x)\cdot g(x)\big)'=f'(x)\,g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)'=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

c) (10) Odvajaj funkcijo

$$f(x)=e^{\tan x}.$$

$$f'(x)=e^{\tan x}\cdot(\tan x)'=e^{\tan x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}\,)$$

saj je $(\tan x)'=\left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'=\frac{\cos x\cdot\cos x-\sin x\cdot(-\sin x)}{\cos^2 x}=$

$$=\frac{\cos^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

3. naloga (25 točk)

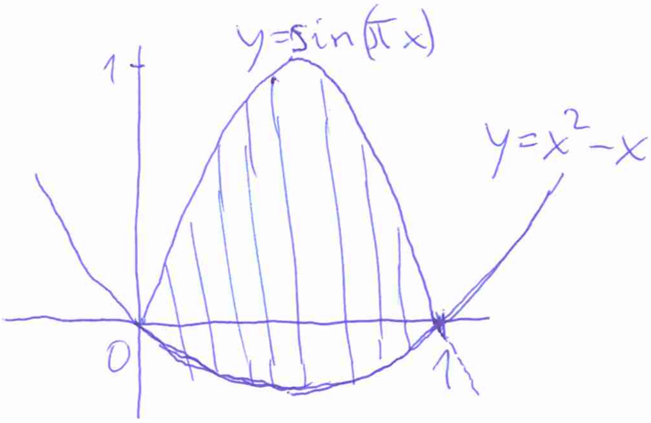
a) (10) Zapiši osnovni izrek analize oziroma Newton-Leibnizovo formulo.

$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$, kjer je $F(x) = \int f(x)\,dx$ nedoločeni integral funkcije $f(x)$.

b) (15) Skiciraj lik, ki ga omejujeta krivulji

$$y = x^2 - x \quad \text{in} \quad y = \sin(\pi x)\ .$$

Izračunaj njegovo ploščino.



$$pl = \int_0^1 \left(\sin \pi x - (x^2 - x)\right) dx$$

$$= \left(-\frac{\cos(\pi x)}{\pi} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right)\Big|_0^1 =$$

$$= \left(\frac{1}{\pi} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\right) - \left(-\frac{1}{\pi}\right) =$$

$$= \frac{2}{\pi} + \frac{1}{6}$$

4. naloga (25 točk)

a) (10) Kako je definirana determinanta matrike velikosti 2×2? Kdaj je taka matrika obrnljiva?

$\det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = ad - bc$

Matrika je obrnljiva $\Leftrightarrow$ $\det A \neq 0$.

b) (15) Za katera realna števila x je vrednost determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ x & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

enaka 1?

$v_3 \leftarrow v_3 - x \cdot v_1$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -x \\ 0 & 0 & 1-x^2 & 0 \\ 0 & -x & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -x \\ 0 & 1-x^2 & 0 \\ -x & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-x^2 \\ -x & 0 \end{matrix} =$$

$$= 1-x^2 + 0 + 0 - x^2(1-x^2) - 0 - 0 =$$

$$= 1 - 2x^2 + x^4$$

$\det = 1 \Leftrightarrow x^4 - 2x^2 = 0 \Leftrightarrow$

$x^2(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2}) = 0 \Leftrightarrow$

$x_1 = 0, \quad x_2 = \sqrt{2}, \quad x_3 = -\sqrt{2}$