1. kolokvij iz Matematike
(Ljubljana, 22. 11. 2016)

Čas reševanja: 90 minut. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. **[25 točk]** Podana je kompleksna enačba

$$a + 2\bar{a} = \frac{-3i + \sqrt{3}}{i}.$$

(a) Poiščite rešitve zgornje enačbe.

(b) Zapišite a v polarnih koordinatah in poiščite vse rešitve enačbe $z^3 = a$.

Rešitev: Vstavimo $a = x + iy$ v prvo enačbo

$$\begin{aligned} (x+iy) + 2(x-iy) &= \frac{-3i+\sqrt{3}}{i} \quad \Big/ \cdot i \\ ix - y + 2xi + 2y &= -3i + \sqrt{3} \\ 3xi + y &= -3i + \sqrt{3} \end{aligned}$$

Če izenačimo realni in imaginarni del, dobimo $3x = -3$ oziroma $x = -1$ in $y = \sqrt{3}$. Rešitev prve enačbe je $a = -1 + i\sqrt{3}$.

Pri drugi enačbi $z^3 = a$ si pomagamo s polarnim zapisom. Število

$$a = -1 + i\sqrt{3} = 2(\cos(\frac{2\pi}{3}) + i\sin(\frac{2\pi}{3}))$$

in

$$z^3 = |z|^3(\cos(3\phi) + i\sin(3\phi)).$$

Če primerjamo absolutno vrednost in polarni kot, dobimo enačbi

$$|z| = \sqrt[3]{2} \text{ in } 3\phi = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Če izberemo $k = 0, 1, 2$, dobimo tri različne rešitve

$$\begin{aligned}
z_0 &= \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{2\pi}{9}) + i\sin(\frac{2\pi}{9})) \\
z_1 &= \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{8\pi}{9}) + i\sin(\frac{8\pi}{9})) \\
z_2 &= \sqrt[3]{2}(\cos(\frac{14\pi}{9}) + i\sin(\frac{14\pi}{9}))
\end{aligned}$$

2. **[20 točk]** Izračunajte limito $\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$ in pokažite, da je zaporedje $a_n = \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$ naraščajoče.

Rešitev: Limito lahko izračunamo direktno

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2n+1}{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2+\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}}} = \sqrt{2},$$

saj gre $\frac{1}{n}$ proti 0, ko gre n proti neskončno.
Zaporedje a_n je naraščajoče, če velja

$$a_{n+1} > a_n$$

za vsak $n \in \mathbb{N}$. V zgornjo neenačbo vstavimo formulo za a_n

$$\sqrt{\frac{2(n+1)+1}{n+1+1}} > \sqrt{\frac{2n+1}{n+1}}$$

Ker sta obe strani neenačbe pozitivni, lahko obe strani kvadriramo in nato pomnožimo s $(n+2)(n+1)$, ki je tudi pozitivno število, saj je $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\frac{2n+3}{n+2} &> \frac{2n+1}{n+1} \Big/ \cdot(n+2)(n+1) \\
(2n+3)(n+1) &> (2n+1)(n+2) \\
2n^2+5n+3 &> 2n^2+5n+2 \\
3 &> 2.
\end{aligned}$$

Neenačba $3 > 2$ očitno velja, zato velja tudi $a_{n+1} > a_n$ in zaporedje je naraščajoče.

3. **[25 točk]** Podana je vrsta $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{n^2+2n}$.

(a) Dokažite, da je n-ta delna vsota zgornje vrste enaka

$$s_n = \frac{n(3n+5)}{n(2n+6)+4}.$$

(b) Izračunajte $\lim_{n\to\infty} s_n$. Ali vrsta konvergira? Če da, jo seštejte.

Rešitev: Trditev dokažemo lahko z indukcijo ali pa tako, da člene vrste zapišemo kot parcialne ulomke in delne vsote poenostavimo. Trditev, ki jo dokazujemo je

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2}{k^2+2k} = \frac{n(3n+5)}{n(2n+6)+4}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Baza indukcija Trditev preverimo za $n = 1$ $S_1 = \frac{2}{3}$, po formuli, dobimo $s_1 = \frac{1(3+5)}{1(2+6)+4} = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$.
Indukcijski korak Preveriti moramo implikacijo, da iz trditve za n sledi trditev za $n+1$. Zato predpostavimo, da velja trditev za n. Vsoto $a_1 + \ldots a_{n+1}$ dobimo tako, da vsoti $a_1 + \ldots a_n$ prištejemo a_{n+1}. Preveriti moramo, da velja

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1}.$$

Če vstavimo formulo za a_n, s_n in s_{n+1} dobimo

$$\begin{aligned}
\frac{(n+1)(3(n+1)+5)}{(n+1)(2(n+1)+6)+4} &= \frac{n(3n+5)}{n(2n+6)+4} + \frac{2}{(n+1)^2+2(n+1)} \\
\frac{(n+1)(3n+8)}{(n+1)(2n+8)+4} &= \frac{3n^2+5n}{2n^2+6n+4} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \\
\frac{(n+1)(3n+8)}{2(n+3)(n+2)} &= \frac{3n^2+5n}{2(n+2)(n+1)} + \frac{2}{(n+1)(n+3)} \quad \Big/ \cdot 2(n+1)(n+2)(n+3) \\
(n+1)^2(3n+8) &= (3n^2+5n)(n+3)+4(n+2) \\
3n^3+14n^2+19n+8 &= 3n^3+14n^2+19n+8
\end{aligned}$$

na obeh straneh enako.

Nalogo lahko rešimo tudi z razcepom na parcialne ulomke:

$$\begin{aligned}\frac{2}{n(n+2)} &= \frac{A}{n}+\frac{B}{n+2}\\ \frac{2}{n(n+2)} &= \frac{A(n+2)+Bn}{n(n+2)}\\ 2 &= (A+B)n+2A,\end{aligned}$$

kar pomeni, da je $A+B=0$ in $2A=2$ oziroma $A=1$ in $B=-1$. Člen vrste lahko zpišemo kot:

$$\frac{2}{n(n+2)}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2},$$

delno vsoto pa kot

$$s_n=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}.$$

Vidimo, da se vmesni členi pokrajšajo in ostanejo le prva dva pozitivna in zadnja dva negativna s

$$\begin{aligned}s_n &= 1+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\\ &= \frac{3(n+1)(n+2)-2n-2(n+1)}{2(n+1)(n+2)}\\ &= \frac{3n^2+5n}{2n^n+3n+4}\\ &= \frac{n(3n+5)}{n(2n+3)+4}\end{aligned}$$

4. **[30 točk]** Dana je funkcija $f(x)=\frac{2-x}{2x+3}$.
   (a) Določite definicijsko območje D_f in zalogo vrednosti Z_f funkcije f. Ali je funkcija soda, liha, injektivna, surjektivna, naraščajoča, padajoča? Določite ničle, pole, asimptote funkcije f in čim bolj natančno narišite njen graf.
   (b) Poiščite predpis za inverzno funkcijo $f^{-1}(x)$.
   (c) Izračunajte enačbo tangente na graf f v točki $(-1,f(-1))$.

Rešitev: Definicijsko območje $D_f = \mathbb{R} - \{-\frac{3}{2}\}$. Zlogo vrednosti bomo določili kasneje, ko bo na voljo več informacij. Ničla funkcije je v $x = 2$, kjer je števec $2 - x$ enak 0. Pol je v $x = -\frac{3}{2}$, kjer je imenovalec $2x + 3$ enak 0. Asimptota je premica $y = -\frac{1}{2}$ in jo izračunamo kot limito

$$\lim_{x\to\infty} \frac{2-x}{2x+3} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}-1}{2+\frac{3}{x}} = -\frac{1}{2}.$$

Funkcija ni niti soda niti liha, je injektivna, ni surjektivna, na intervalih $(-\infty, -\frac{3}{2})$ in $(-\frac{3}{2}, \infty)$ je padajoča.

Inverzno funkcijo $y = f^{-1}(x)$ tako, da iz enačbe $f(y) = x$ izrazimo y

$$\begin{aligned}
\frac{2-y}{2y+3} &= x \quad / \cdot(2y+3) \\
2-y &= x(2y+3) \\
2-3x &= 2xy+y \\
2-3x &= y(2x+1) \quad /: (2x+1) \\
\frac{2-3x}{2x+1} &= y
\end{aligned}$$

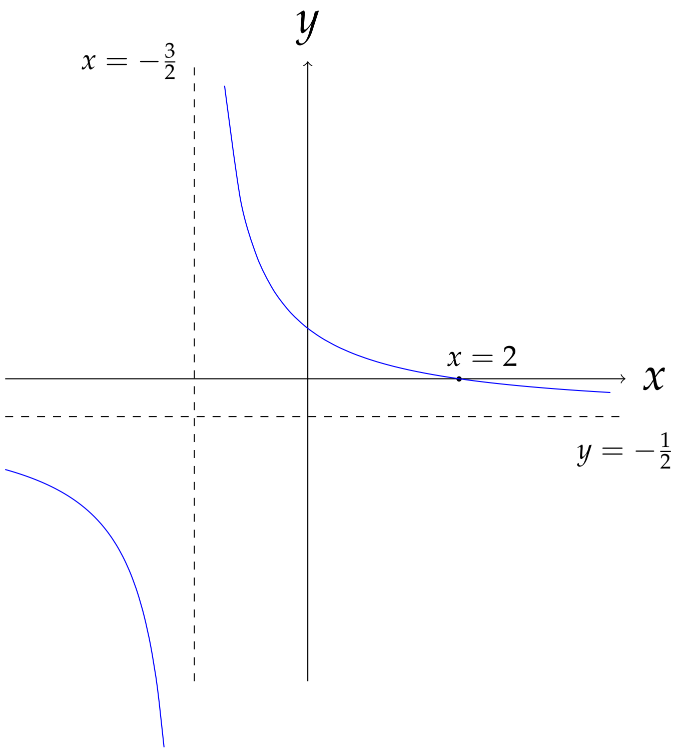
Definicijskemu območje inverzne funkcije je $\mathbb{R} - \{-\frac{1}{2}\}$, kar je enako zalogi vrednosti f. Ker je inverzna funkcija dobro definirana, je to dokaz, da je funkcija f injektivna.

Tangenta, ki jo iščemo, je premica, ki gre skozi točko $(-1, f(-1))$ in ima smerni koeficient enak odvodu $f'(-1)$. Odvod $f'(x)$ je enak

$$f'(x) = \frac{-(2x+3) - 2(2-x)}{(2x+3)^2} = \frac{-7}{(2x+3)^2},$$

vrednost $f'(-1) = -7$. Vrednost $f(-1) = 3$. Enačba tangente je torej

$$\begin{aligned}
y - f(x_0) &= f'(x_0)(x - x_0) \\
y - 3 &= -7(x+1) \\
y &= -7x - 4
\end{aligned}$$



y
$x = -\frac{3}{2}$
$x = 2$
x
$y = -\frac{1}{2}$