2. kolokvij iz Matematike

(Ljubljana, 17. 1. 2017)

Čas reševanja: 90 minut. Naloge so enakovredne. Preberi celotno besedilo vsake naloge. Dovoljena je uporaba dveh listov velikosti A4 z obrazci. Rezultati bodo objavljeni na `ucilnica.fri.uni-lj.si`.

Vse odgovore dobro utemelji!

1. Funkciji f in g sta dani s predpisoma

$$f(x) = x^2 + x - 8 \text{ in } g(x) = 4 - x^2 - x.$$

Izračunaj ploščino lika, ki ga omejujejo grafa funkcij f, g in y-os in ki leži na polravnini $x \geq 0$.

Rešitev: Presečišča obeh grafov so tam, kjer velja $x^2+x-8 = 4-x^2-x$ oziroma $x^2+x-6 = 0$ in zato $x_{1,2} = \frac{-1\pm\sqrt{1-4\cdot(-6)}}{2} = \frac{-1\pm 5}{2} = -3, 2$, ker pa se osredotočamo na 1. in 4. kvadrant, pride v poštev le 2. Naš lik je zato omejen z $0 \leq x \leq 2$ in $x^2+x-8 \leq y \leq 4-x^2-x$. Njegova ploščina je $\int_0^2 \big((4-x^2-x)-(x^2+x-8)\big)dx = \int_0^2 (12-2x-2x^2)dx = (12x-x^2-\frac{2x^3}{3})\Big|_0^2 = \frac{44}{3} \doteq \underline{\underline{14.7}}$.

2. V prostoru je dan trikotnik $\triangle ABC$ z oglišči $A(2,1,1)$, $B(3,0,1)$ in $C(4,1,-2)$.

   (a) Poišči točko D, da bo $ABCD$ paralelogram. Ali je $ABCD$ pravokotnik?

   (b) Izračunaj obseg in ploščino trikotnika $\triangle ABC$.

Rešitev: V paralelogramu velja $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ in $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$. Krajevni vektor točke D dobimo kot

$$\vec{r}_D = \vec{r}_A + \overrightarrow{AD} = \vec{r}_A + \overrightarrow{BC} = [3,2,-2]^T,$$

kjer je $\overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = [1,1,-3]^T$. Lik $ABCD$ bo pravokotnik, če je kot med vektorjema $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{BC}$ pravi, to pa je natanko tedaj, ko je skalarni produkt enak 0:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [1,-1,0]^T \cdot [1,1,-2] = 1 - 1 + 0 = 0.$$

Obseg trikotnika je enak

$$o = \|\overrightarrow{AB}\| + \|\overrightarrow{BC}\| + \|\overrightarrow{AC}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0} + \sqrt{1^2 + 1^2 + (-3)^2} + \sqrt{2^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{2} + \sqrt{11} + \sqrt{13}.$$

Ker je lik pravokotnik, je ploščina enaka

$$P = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{AB}\|\|\overrightarrow{BC}\| = \frac{1}{2}\sqrt{2}\sqrt{11} = \frac{\sqrt{22}}{2}.$$

3. Naj bo p premica skozi točko $(-8,4,-6)$ s smernim vektorjem $\vec{a} = (1,0,2)$. Naj bo q premica skozi točko $(5,5,-2)$ s smernim vektorjem $\vec{b} = (2,1,-3)$.

   (a) Določi enačbo ravnine Σ, ki je vzporedna na p in q ter gre skozi točko $P(4,1,3)$.

   (b) Koliko sta premici p in q oddaljeni od ravnine Σ?

   Rešitev:

   (a) Ker je Σ vzporedna na p in q, je njen normalni vektor $\vec{n}$ pravokoten na $\vec{a}$ in $\vec{b}$, torej je $\vec{n}$ vzporeden na $\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2,7,1)$. Ravnina ima enačbo $(x,y,z)\cdot\vec{n} = P\cdot\vec{n}$, torej $(x,y,z)\cdot(-2,7,1) = (4,1,3)\cdot(-2,7,1)$ oziroma $\underline{\underline{-2x+7y+z=2}}$.

   (b) Premici p in q sta od Σ oddaljeni toliko, kot sta točki $(-8,4,-6)$ in $(5,5,-2)$ oddaljeni od Σ. Formula za oddaljenost točke T od ravnine skozi P z normalo $\vec{n}$ je $\frac{|(P-T)\cdot\vec{n}|}{\|\vec{n}\|}$. Dobimo torej $\frac{|((4,1,3)-(-8,4,-6))\cdot(-2,7,1)|}{\|(-2,7,1)\|} = \frac{|(12,-3,9)\cdot(-2,7,1)|}{\sqrt{54}} = \frac{|-36|}{\sqrt{54}} = 2\sqrt{6} \doteq \underline{\underline{4.9}}$ in $\frac{|((4,1,3)-(5,5,-2))\cdot(-2,7,1)|}{\|(-2,7,1)\|} = \frac{|(-1,-4,5)\cdot(-2,7,1)|}{\sqrt{54}} = \frac{|-21|}{\sqrt{54}} = 7/\sqrt{6} \doteq \underline{\underline{2.9}}$.

4. Dana je matrika

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj A^2 in poišči vse rešitve sistema $A\vec{x} = [1, 2, 3]^T$.

Rešitev: Napišimo razširjeno matriko sistema in naredimo gaussovo eliminacijo

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Če je $\vec{x} = [x, y, z]^T$, dobimo enačbe $-z = 3$, $y + z = 0$ in $x + 2y + z = 1$. Rešitev dobimo z vstavljanjem $z = -3$, $y = 3$ in $x = -2$ oziroma $\vec{x} = [-2, 3, -3]^T$.