Ime in priimek

Matematika: drugi izpit - računski del

4. februar 2022

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dano je zaporedje s splošnim členom $a_n = \frac{2n-7}{3n+2}$.

a) (10 točk) Pokaži, da je zaporedje a_n naraščajoče.

$$a_{n+1} \geq a_n \ \dots \ \frac{2(n+1)-7}{3(n+1)+2} \geq \frac{2n-7}{3n+2} \ \dots \ \frac{2n-5}{3n+5} \geq \frac{2n-7}{3n+2} \ \Big/ \cdot (3n+5)(3n+2)$$

$$\dots \ (2n-5)\cdot(3n+2) \geq (2n-7)(3n+5) \ \dots \ \cancel{6n^2} - \cancel{11n} - 10 \geq \cancel{6n^2} - \cancel{11n} - 35,$$

kar je seveda res, a_n je torej naraščajoče.

b) (10 točk) Pokaži, da je zaporedje a_n omejeno: utemelji, da je $M = 1$ njegova zgornja meja, $m = -\frac{7}{2}$ pa njegova spodnja meja.

$$a_n \leq M \ \dots \ \frac{2n-7}{3n+2} \leq 1 \ \Big/ \cdot (3n+2) \ \dots \ 2n-7 \leq 3n+2 \ \dots \ 0 \leq n+9,$$

kar je seveda res za $n \in \mathbb{N}$. a_n je omejeno z 1.

$$a_n \geq m \ \dots \ \frac{2n-7}{3n+2} \geq -\frac{7}{2} \ \Big/ \cdot 2(3n+2) \ \dots \ 4n-14 \geq -21n-14 \ \dots$$

$\dots$ $25n \geq 0$, kar je res za $n \in \mathbb{N}$. a_n je omejeno z $-\frac{7}{2}$.

c) (5 točk) Poišči limito zaporedja a_n.

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{2n-7}{3n+2} = \lim_{n\to\infty} \frac{2-\frac{7}{n}}{3+\frac{2}{n}} = \frac{2}{3}.$$

$\frac{7}{n} \to 0$, $\frac{2}{n} \to 0$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = x^4 - 3x^3 + x^2 - 1$.

a) (15 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f.

$f'(x) = 4x^3 - 9x^2 + 2x$

$f'(x) = 0 \ldots \quad x(4x^2 - 9x + 2) = 0 \ \ldots \quad x(4x-1)(x-2) = 0$

stac. točke f $\longrightarrow$ $x_1 = 0, \ x_2 = \frac{1}{4}, \ x_3 = 2$

b) (10 točk) Poišči največjo in najmanjšo vrednost funkcije f na intervalu $[1, 3]$.

f zavzame največjo/najmanjšo vrednost v stac. točki znotraj $[1,3]$ ali v robni točki intervala.

Kandidati so torej:

	x	$f(x)$	
	1	-2	
iz (a) $\longrightarrow$	$x_3 = 2$	-5	$f(2) = 16 - 3 \cdot 8 + 4 - 1$
	3	8	$f(3) = \cancel{81} - \cancel{81} + 9 - 1$

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Z uvedbo primerne nove spremenljivke izračunaj nedoločeni integral

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx.$$

$$\int \frac{x^3}{x^4+2}\,dx \underset{\uparrow}{=} \frac{1}{4}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{4}\log(t) + C = \frac{1}{4}\log(x^4+2) + C\,.$$

$t = x^4+2$

$dt = 4x^3\,dx \ldots \frac{dt}{4} = x^3\,dx$

b) (10 točk) Izračunaj določena integrala

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx \;\text{ in }\; \int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx.$$

$$\int_0^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = \frac{1}{4}\log(x^4+2)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\log(18) - \log(2)\right) =$$

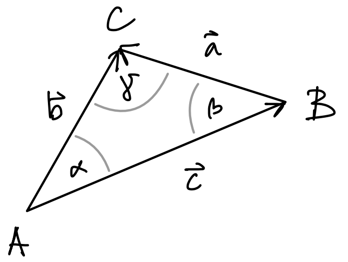
$$= \frac{1}{4}\log\left(\frac{18}{2}\right) = \frac{1}{4}\log(3^2) = \frac{\log 3}{2}\,.$$

$$\int_{-2}^2 \frac{x^3}{x^4+2}\,dx = 0,$$ saj je $\frac{x^3}{x^4+2}$ liha funkcija.

4. naloga (25 točk)

Trikotnik ΔABC ima oglišča $A(4,-1,2)$, $B(0,-1,5)$ in $C(-3,-1,1)$.

a) (10 točk) Izračunanj obseg in ploščino ΔABC.



$\vec{a} = \overrightarrow{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B = \begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \end{bmatrix}$, $\|\vec{a}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$,

$\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$, $\|\vec{b}\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}$,

$\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}$, $\|\vec{c}\| = \sqrt{25} = 5$.

Obseg je torej $o = \|\vec{a}\| + \|\vec{b}\| + \|\vec{c}\| = 10 + 5\sqrt{2}$.

Ploščina je (npr.) $pl_\Delta = \frac{1}{2}\|\vec{b} \times \vec{c}\| = \left\| \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix} \right\| = 25$.

$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{bmatrix} -7 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$$

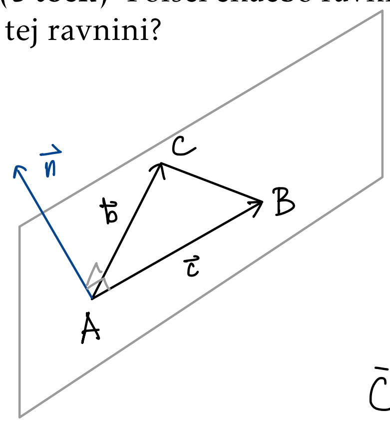
b) (10 točk) Določi notranje kote ΔABC.

$$\cos\alpha = \frac{\vec{b} \cdot \vec{c}}{\|\vec{b}\| \cdot \|\vec{c}\|} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \quad \alpha = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{\vec{a} \cdot \vec{c}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{c}\|} = \frac{0}{25} = 0 \ldots \quad \beta = \frac{\pi}{2} = 90^\circ$$

$$\cos\gamma = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{a}\| \cdot \|\vec{b}\|} = \frac{25}{25\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \ldots \quad \gamma = \frac{\pi}{4} = 45^\circ$$

c) (5 točk) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točke A, B in C. Ali leži točka $D(1,-1,1)$ na tej ravnini?



Normalni vektor $\vec{n}$ te ravnine je vzporeden $\vec{b} \times \vec{c} = \begin{bmatrix} 0 \\ 25 \\ 0 \end{bmatrix}$. Vzemimo kar $\vec{n} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$.

Enačba ravnine je torej: $y = -1$.

$0 \cdot x + 1y + 0z$

$\vec{n} \cdot \vec{r}_A$

Če vstavimo koordinate točke D v to enačbo, dobimo $-1 = -1$ (kar je res), torej je D vsebovana v tej ravnini.