Ime in priimek

Vpisna številka

1	
2	
3	
4	
Σ	

Matematika: tretji izpit – računski del

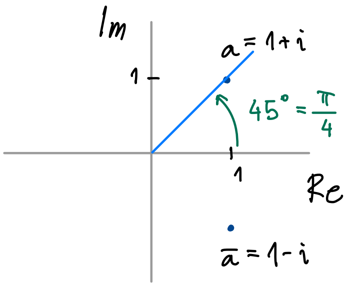
16. marec 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo** prepovedani. **Vse odgovore dobro utemelji!**

1. naloga (25 točk)

Dano je kompleksno število $a = 1 + i$.

a) (10 točk) Zapiši števili a in $\overline{a}$ v polarni obliki.



$|a| = |\overline{a}| = \sqrt{1^2 + (\pm 1)^2} = \sqrt{2}$.

$a = re^{i\varphi} = \sqrt{2}\, e^{i\pi/4}$

$\overline{a} = re^{-i\varphi} = \sqrt{2}\, e^{-i\pi/4} = \sqrt{2}\, e^{i\frac{7\pi}{4}}$ $\quad = 2\pi - \frac{\pi}{4}$

b) (5 točk) Izračunaj

$$\frac{a^{2022}}{\overline{a}^{2022}}.$$

$$\frac{a^{2022}}{\overline{a}^{2022}} = \frac{\cancel{\sqrt{2}^{2022}}\, e^{i\pi/4}}{\cancel{\sqrt{2}^{2022}}\, e^{-i\pi/4}} = e^{i\left(\pi/4 - \left(-\pi/4\right)\right)} = e^{i\frac{\pi}{2}} = -1$$

c) (10 točk) Poišči vse kompleksne rešitve enačbe

$$z^3 = a.$$

Rešitve lahko pustiš v polarnem zapisu.

$z^3 = 1 + i \ \ldots \ z^3 = \sqrt{2}\, e^{\pi/4} \ \ldots$ $z_0 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}\cdot\frac{\pi}{4}} = \sqrt[6]{2} \cdot e^{\pi/12}$

$z_1 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 2\pi\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{3\pi}{4}}$

$z_2 = \sqrt[3]{\sqrt{2}} \cdot e^{\frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{4} + 4\pi\right)} = \sqrt[6]{2}\, e^{\frac{17\pi}{12}}$

2. naloga (25 točk)

Dana je funkcija f s predpisom $f(x) = \frac{x^2-1}{e^x}$.

a) (10 točk) Poišči stacionarne točke funkcije f. V katerih izmed stacionarnih točk so lokalni minimumi oz. lokalni maksimumi? Utemelji!

$f'(x) = 0 \ldots (1+2x-x^2)e^{-x} = 0 \ldots 1+2x-x^2 = 0 \ldots x^2-2x-1=0 \ldots x_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+4}}{2} = 1 \pm \sqrt{2}.$

stacionarni točki

$f'(x) = ((x^2-1)e^{-x})' = 2xe^{-x} + (x^2-1)\cdot(-e^{-x}) = (1+2x-x^2)e^{-x}$

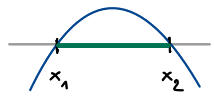
Iz (b) imamo:

pada | $1-\sqrt{2}$ | narašča | $1+\sqrt{2}$ | pada,

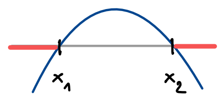
torej je $x_1 = 1-\sqrt{2}$ lokalni minimum,
$x_2 = 1+\sqrt{2}$ pa lokalni maksimum.

b) (10 točk) Določi intervale naraščanja in padanja funkcije f.

f narašča, ko $f'(x) \geq 0 \ldots 1+2x-x^2 \geq 0$, torej za $x \in [1-\sqrt{2}, 1+\sqrt{2}]$.



f pada, ko $f'(x) \leq 0 \ldots 1+2x-x^2 \leq 0$, torej za $x \in (-\infty, 1-\sqrt{2}] \cup [1+\sqrt{2}, \infty)$.



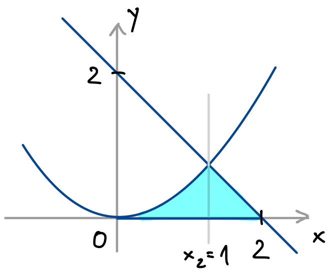
c) (5 točk) Poišči enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(1, f(1))$.

Smerni koef. tangente je $k = f'(1) = (1+2\cdot 1-1^2)e^{-1} = \frac{2}{e}$.

Enačba tangente je tako: $y - \underbrace{f(1)}_{0} = k(x-1) \ldots y = \frac{2}{e}(x-1).$

3. naloga (25 točk)

a) (15 točk) Izračunaj ploščino območja, ki ga omejujejo krivulje $y = x^2$, $y = 2 - x$ in $y = 0$. Nariši skico.



Presečišče $y = x^2$ ter $y = 2-x$:

$x^2 = 2-x \ \ldots \ x^2+x-2=0 \ \ldots \ (x-1)(x+2)=0 \ \ldots \ x_1=-2,$

$x_2 = 1$

$$pl = \int_0^1 x^2\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \frac{x^3}{3}\Big|_0^1 + \left(2x - \frac{x^2}{2}\right)\Big|_1^2 = \frac{1}{3} + \left(2 - \frac{3}{2}\right) = \frac{5}{6}.$$

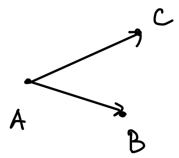
b) (10 točk) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobiš, če parabolo $y = x^2$ zavrtiš okrog x-osi na intervalu $[0, 2]$.

$$V = \pi \int_0^2 \big(\underbrace{f(x)}_{=x^2}\big)^2\,dx = \pi \int_0^2 x^4\,dx = \pi \cdot \frac{x^5}{5}\Big|_0^2 = \frac{32\pi}{5}.$$

4. naloga (25 točk)

Trikotnik ABC ima oglišča $A(2,0,0)$, $B(4,1,2)$ in $C(0,2,1)$.

a) (10 točk) Zapiši enačbo ravnine Σ, v kateri leži trikotnik ABC.



$\vec{n} \parallel \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3 \\ -6 \\ 6 \end{bmatrix}$, vzamemo npr. $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Torej: $\Sigma: \; x + 2y - 2z = 2$

vstavimo $A(2,0,0)$ v

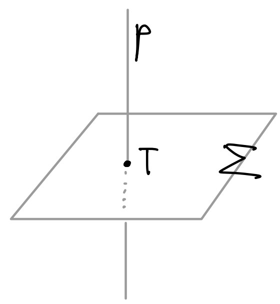
b) (10 točk) Zapiši enačbo premice p, ki je pravokotna na ravnino Σ in gre skozi točko $D(3,3,-1)$.

$p \perp \Sigma$ ... smerni vektor p je kar $\vec{n}$.

Torej: $p: \; \vec{r} = \vec{r}_D + t\vec{n} = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix}$ in

enačba je $p: \; x - 3 = \dfrac{y-3}{2} = \dfrac{z+1}{-2}$.

c) (5 točk) Poišči presečišče premice p in ravnine Σ.



Vstavimo parametrizacijo p v enačbo Σ:

$(3+t) + 2(3+2t) - 2(-1-2t) = 2 \; \dots \; 11 + 9t = 2 \; \dots \; 9t = -9 \; \dots \; t = -1$,

torej $\vec{r}_T = \begin{bmatrix} 3 \\ 3 \\ -1 \end{bmatrix} - 1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ in $T(2,1,1)$ je presečišče.