

**Matematika: četrti izpit – računski del**

23. avgust 2022

Čas pisanja je 90 minut. Dovoljena je uporaba 1 lista A4 formata s formulami. Za pozitivno oceno je potrebno zbrati vsaj 50 točk. Poskusi prepisovanja, pogovarjanja, uporaba elektronskih pripomočkov so **strogo prepovedani**. **Vse odgovore dobro utemelji!**

**1. naloga (25 točk)**

a) (5 točk) Kompleksno število  $a = \frac{1-18i}{2-i}$  zapiši v obliki  $a = x + iy$ ,  $x, y \in \mathbb{R}$ .

b) (10 točk) Reši enačbo  $4z - 3\bar{z} = \frac{1-18i}{2-i}$ .

c) (10 točk) Naj bo  $v = 4 - i$  in  $w = -2v + 6$ . Kompleksno število  $w$  zapiši v polarni obliki ter poišči vse kompleksne rešitve enačbe  $z^2 = w$ .

$$\begin{aligned}
 a) \quad a &= \frac{1-18i}{2-i} \cdot \frac{1 \cdot (2+i)}{1 \cdot (2+i)} = \frac{(1-18i)(2+i)}{4+1} = \frac{2+i-36i+18}{5} = \\
 &= \frac{20-35i}{5} = \underline{\underline{4-7i}}
 \end{aligned}$$

$$b) \quad 4z - 3\bar{z} = \frac{1-18i}{2-i} \quad z = x + iy, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

$$4z - 3\bar{z} = 4 - 7i$$

$$4(x+iy) - 3(x-iy) = 4 - 7i$$

$$4x + 4iy - 3x + 3iy = 4 - 7i$$

$$x + 7iy = 4 - 7i$$

$$x = 4 \quad 7y = -7$$

$$y = -1$$

$$\boxed{z = 4 - i}$$

$$c) \quad w = -2(4-i) + 6 = -2 + 2i$$

Polarni zapis:

$$|w| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\tan \varphi = \frac{2}{-2} = -1 \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{4} + \pi = \frac{3\pi}{4}$$

$$w = 2\sqrt{2} \left( \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} \right)$$

$$z^2 = w$$

$$z_k = \sqrt{|w|} \left( \cos \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2} + i \sin \frac{\frac{3\pi}{4} + 2k\pi}{2} \right); \quad k=0,1$$

$$z_0 = \sqrt{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{3\pi}{8} + i \sin \frac{3\pi}{8} \right)$$

$$z_1 = \sqrt{2\sqrt{2}} \left( \cos \frac{11\pi}{8} + i \sin \frac{11\pi}{8} \right)$$

## 2. naloga (25 točk)

Realna funkcija  $g$  ima predpis  $g(x) = x^2 \log(x)$ . (Tu smo z  $\log(x)$  označili naravni logaritem števila  $x$ .)

a) (5 točk) Določi naravno definicijsko območje funkcije  $g$  in poišči njene ničle.

b) (5 točk) Izračunaj  $\lim_{x \searrow 0} g(x)$ .

c) (10 točk) Izračunaj odvod  $g'$  funkcije  $g$  in poišči njene stacionarne točke.

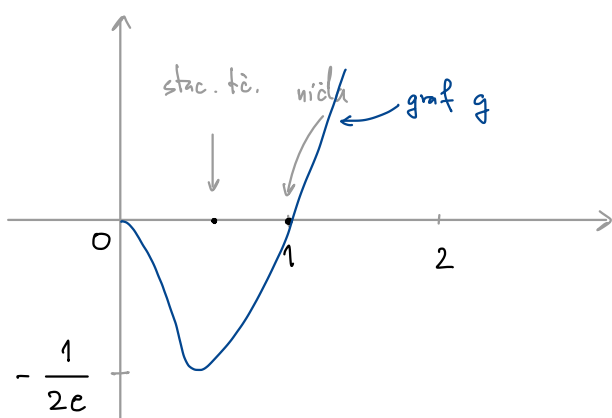
d) (5 točk) Določi intervale naraščanja in padanja  $g$  in čimbolj natančno nariši njen graf na intervalu  $[0, 2]$ .

(a) Izraz  $x^2 \log(x)$  ima smisel, če je  $x > 0$ , torej  $D_g = (0, \infty)$ . } 2  
 $g(x) = 0 \dots x^2 \log x = 0 \dots$   ~~$x = 0$~~  ali  $\log x = 0$ , tj.  $x = 1$ . } 3  
 odpade, saj  $0 \notin D_g$

(b)  $\lim_{x \searrow 0} g(x) = \lim_{x \searrow 0} x^2 \log(x) = \lim_{x \searrow 0} \frac{\log(x)}{1/x^2} \stackrel{\text{l'Hopital}}{=} \lim_{x \searrow 0} \frac{1/x}{-2x^{-3}} = \lim_{x \searrow 0} (-2x^2) = 0$  } 5

(c)  $g'(x) = 2x \cdot \log x + x^2 \cdot \frac{1}{x} = x(2 \log x + 1)$  } 5  
 Stac. točke:  $g'(x) = 0 \dots x(2 \log x + 1) = 0 \dots$   ~~$x = 0$~~  ali } 5  
 $2 \log x + 1 = 0 \dots \log x = -\frac{1}{2}$   
 $\dots x = e^{-1/2} = \frac{1}{\sqrt{e}}$

(d) Edina stac. točka je  $x = \frac{1}{\sqrt{e}}$ . Ker je  $g'(1) = 1 > 0$ ,  $g$  } 3  
 na  $(\frac{1}{\sqrt{e}}, \infty)$  narašča, ker je  $g'(\frac{1}{e}) = -e < 0$ ,  $g$  na  
 $(0, \frac{1}{\sqrt{e}})$  pada.



$$g\left(\frac{1}{\sqrt{e}}\right) = \frac{1}{e} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{2e}$$
 } 2

### 3. naloga (25 točk)

Dana je funkcija

$$f(x) = 12x^2 \sin(2x^3).$$

a) (15 točk) Izračunaj  $\int f(x) dx$ .

b) (10 točk) Izračunaj prostornino vrtenine, ki jo dobiš, če krivuljo  $y = \sqrt{f(x)}$  zavrtiš okrog  $x$ -osi na intervalu  $[0, \sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}]$ .

$$\begin{aligned} \text{a) } \int 12x^2 \sin(2x^3) dx &= 2 \int \sin(u) du = \\ & \begin{array}{l} \nearrow \\ u = 2x^3 \quad (5) \\ du = 6x^2 dx \end{array} \end{aligned}$$

$$= -2 \cos(u) + C = -2 \cos(2x^3) + C \quad (5)$$

$$\text{b) } V = \pi \int_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} f(x) dx = \pi (-2 \cos(2x^3)) \Big|_0^{\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}}} \quad (5)$$

$$= -2\pi (\cos(2(\sqrt[3]{\frac{\pi}{2}})^3) - \cos(2 \cdot 0^3)) = (2)$$

$$= -2\pi (\cos(2 \cdot \frac{\pi}{2}) - \cos(0)) =$$

$$= -2\pi (\cos(\pi) - \cos(0)) = (2)$$

$$= -2\pi (-1 - 1) = -2\pi (-2) = 4\pi \quad (1)$$

4. naloga (25 točk)

V  $\mathbb{R}^3$  so dane točke  $A(1, 2, 1)$ ,  $B(3, 0, 2)$  ter  $C(3, 2, 0)$ .

a) (5 točk) Izračunaj ploščino trikotnika  $\triangle ABC$ .

b) (10 točk) Poišči enačbo ravnine, ki gre skozi točke  $A$ ,  $B$  in  $C$ .

c) (10 točk) Določi koordinate težišča trikotnika  $\triangle ABC$  in poišči enačbo premice, ki je pravokotna na  $\triangle ABC$  in gre skozi njegovo težišče.

(a)  $pl_{\Delta} = \frac{1}{2} \|\vec{AB} \times \vec{AC}\| = \frac{1}{2} \sqrt{2^2 + 4^2 + 4^2} = \frac{1}{2} \sqrt{36} = 3.$

$\vec{AB} = \vec{r}_B - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

$\vec{AC} = \vec{r}_C - \vec{r}_A = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$

$\vec{AB} \times \vec{AC} = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 4 \end{bmatrix}$

} 5

(b)  $\vec{n} \parallel \vec{AB} \times \vec{AC} \dots$  vzamemo  $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}.$

} 5

Enačba ravnine je torej  $x + 2y + 2z = 7.$

} 5

↑  
vstavimo  $\vec{r}_A$  v levo str.

(c) Težišče je v točki  $T$  s krajševnim vektorjem

} 5

$\vec{r}_T = \frac{1}{3} (\vec{r}_A + \vec{r}_B + \vec{r}_C) = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 7 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix},$  torej  $T(\frac{7}{3}, \frac{4}{3}, 1).$

Smerni vektor pravokotne premice je kar  $\vec{n} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix}$  (iz (b) dela).

} 5

Enačba te premice je torej:

$x - \frac{7}{3} = \frac{y - \frac{4}{3}}{2} = \frac{z - 1}{2}.$

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

**Izpit (teorija) iz Matematike, 1RI VS, FRI, 23. 08. 2022**

Obkrožite pravilne odgovore (lahko je več pravih). Vsaka pravilno obkrožena rešitev prinaša 10 točk. Vsaka nepravilno obkrožena rešitev prinaša -2 točki. Oddate le ta list z obkroženimi rešitvami.

1. Gorivo se je najprej podražilo za 6 % in potem naknadno še za 10%. Koliko odstotna je skupna podražitev goriva?

- A) 16.5%       B) 16.6%      C) 17.5%      D) 17.7%      E) 18.5%      F) 18.8%

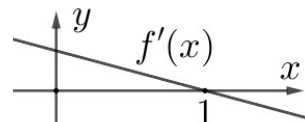
2. Za kompleksno število  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$  je  $z^{27}$  enako

- A)  $i$       B)  $-i$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$       D)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$        E)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$       F) 1

3. Če je  $f(x+1) = g(x) - 1$  in  $f(1) = 0$ , katera od spodnjih enačb velja za funkcijo  $g(x)$ ?

- A)  $g(-1) = 0$       B)  $g(-1) = 1$       C)  $g(0) = 0$        D)  $g(0) = 1$       E)  $g(1) = 0$       F)  $g(1) = 1$

4. Na sliki (desno) je graf funkcije  $f'(x)$ . Vemo tudi, da velja  $f(0) = 0$ . Katere izmed spodnjih trditev so gotovo pravilne?



- |  |                                       |  |
|--|---------------------------------------|--|
| A) $f(\frac{1}{2}) < 0$                          | B) $f(\frac{1}{2}) = 0$               | <input checked="" type="radio"/> C) $f(\frac{1}{2}) > 0$ |
| <input checked="" type="radio"/> D) $f(1) > 0$   | E) $f(1) = 0$                         | F) $f(1) < 0$  |
| G) $f''(0) = 0$                                  | H) $f''(\frac{1}{2}) = 0$             | I) $f''(1) = 0$  |
| <input checked="" type="radio"/> J) $f''(0) < 0$ | K) $f''(\frac{1}{2}) > 0$             | L) $f''(1) > 0$  |
| M) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0$            | N) $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 0$ | O) $\int_0^1 f(x) dx = 0$                                |
| P) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 1$            | R) $\int_0^1 f(x) dx = 1$             | S) $\int_0^1 f(x) dx < 0$                                |

5. Točka  $(7, b, c)$  leži na premici, ki gre skozi točko  $(1, 2, 3)$  in je pravokotna na ravnino  $3x + y + z - 1 = 0$ . Koliko je  $b$ ?

- A) -1      B) 1      C) 2      D) 3       E) 4      F) 5

6. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{matrix} x & + & 2y & = & 1 \\ ax & + & 3y & = & 1 \end{matrix} \text{ in vemo, da velja } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri  $x$  ustreza rešitvi linearnega sistema enačb?

- A) -2      B) -1      C) 0       D) 1      E) 2      F) 3

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

**Izpit (teorija) iz Matematike, 1RI VS, FRI, 23. 08. 2022**

Obkrožite pravilne odgovore (lahko je več pravih). Vsaka pravilno obkrožena rešitev prinaša 10 točk. Vsaka nepravilno obkrožena rešitev prinaša -2 točki. Oddate le ta list z obkroženimi rešitvami.

1. Gorivo se je najprej podražilo za 7 % in potem naknadno še za 10%. Koliko odstotna je skupna podražitev goriva?

- A) 16.5%      B) 16.6%      C) 17.5%      **D) 17.7%**      E) 18.5%      F) 18.8%

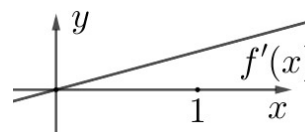
2. Za kompleksno število  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$  je  $z^{31}$  enako

- A)  $i$       B)  $-i$       C)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$       **D)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$**       E)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$       F) 1

3. Če je  $f(x - 1) = g(x) - 1$  in  $f(0) = 0$ , katera od spodnjih enačb velja za funkcijo  $g(x)$ ?

- A)  $g(-1) = 0$       B)  $g(-1) = 1$       C)  $g(0) = 0$       D)  $g(0) = 1$       E)  $g(1) = 0$       **F)  $g(1) = 1$**

4. Na sliki (desno) je graf funkcije  $f'(x)$ . Vemo tudi, da velja  $f(0) = 0$ . Katere izmed spodnjih trditev so gotovo pravilne?



- |  |  |  |
|--|--|--|
| A) $f(\frac{1}{2}) < 0$                                    | B) $f(\frac{1}{2}) = 0$                        | <b>C) <math>f(\frac{1}{2}) &gt; 0</math></b> |
| <b>D) <math>f(1) &gt; 0</math></b>                         | E) $f(1) = 0$                                  | F) $f(1) < 0$                                |
| G) $f''(0) = 0$  | H) $f''(\frac{1}{2}) = 0$                      | I) $f''(1) = 0$                              |
| J) $f''(0) < 0$  | <b>K) <math>f''(\frac{1}{2}) &gt; 0</math></b> | L) $f''(1) < 0$                              |
| M) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0$                      | N) $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 0$          | O) $\int_0^1 f(x) dx = 0$                    |
| <b>P) <math>\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &gt; 0</math></b> | R) $\int_0^1 f(x) dx = -1$                     | S) $\int_0^1 f(x) dx < 0$                    |

5. Točka  $(7, b, c)$  leži na premici, ki gre skozi točko  $(1, 2, 3)$  in je pravokotna na ravnino  $3x + y + z - 1 = 0$ . Koliko je  $c$ ?

- A) -1      B) 1      C) 2      D) 3      E) 4      **F) 5**

6. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{matrix} x & + & 2y & = & 1 \\ ax & + & 3y & = & 1 \end{matrix} \text{ in vemo, da velja } \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ a & 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri  $y$  ustreza rešitvi linearnega sistema enačb?

- A) -2      B) -1      **C) 0**      D) 1      E) 2      F) 3

Ime in priimek: \_\_\_\_\_

Vpisna številka: \_\_\_\_\_

**Izpit (teorija) iz Matematike, 1RI VS, FRI, 23. 08. 2022**

Obkrožite pravilne odgovore (lahko je več pravih). Vsaka pravilno obkrožena rešitev prinaša 10 točk. Vsaka nepravilno obkrožena rešitev prinaša -2 točki. Oddate le ta list z obkroženimi rešitvami.

1. Gorivo se je najprej podražilo za 8 % in potem naknadno še za 10%. Koliko odstotna je skupna podražitev goriva?

- A) 16.5%      B) 16.6%      C) 17.5%      D) 17.7%      E) 18.5%      **F) 18.8%**

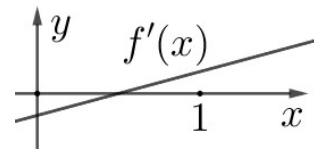
2. Za kompleksno število  $z = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i = e^{i\frac{\pi}{4}}$  je  $z^{33}$  enako

- A)  $i$       B)  $-i$       **C)  $\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$**       D)  $\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}i$       E)  $-\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}i$       F) 1

3. Če je  $f(x+1) = g(x) + 1$  in  $f(1) = 0$ , katera od spodnjih enačb velja za funkcijo  $g(x)$ ?

- A)  $g(-1) = 0$       B)  $g(-1) = 1$       **C)  $g(0) = -1$**       D)  $g(0) = 0$       E)  $g(0) = 1$       F)  $g(1) = 1$

4. Na sliki (desno) je graf funkcije  $f'(x)$ . Vemo tudi, da velja  $f(0) = 0$ . Katere izmed spodnjih trditev so gotovo pravilne?



- |                                       |  |  |
|---------------------------------------|--|--|
| A) $f(\frac{1}{4}) > 0$               | <b>B) <math>f(\frac{1}{4}) &lt; 0</math></b> | C) $f(\frac{1}{4}) = 0$                                    |
| D) $f(\frac{1}{2}) > 0$               | E) $f(\frac{1}{2}) = 0$                      | <b>F) <math>f(\frac{1}{2}) &lt; 0</math></b>               |
| G) $f''(0) = 0$                       | H) $f''(\frac{1}{2}) = 0$                    | I) $f''(1) = 0$  |
| <b>J) <math>f''(0) &gt; 0</math></b>  | K) $f''(\frac{1}{2}) < 0$                    | L) $f''(1) < 0$  |
| M) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx = 0$ | N) $\int_{\frac{1}{2}}^1 f(x) dx = 0$        | O) $\int_0^1 f(x) dx = 0$                                  |
| P) $\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx > 0$ | R) $\int_0^1 f(x) dx = 1$                    | <b>S) <math>\int_0^{\frac{1}{2}} f(x) dx &lt; 0</math></b> |

5. Točka  $(4, b, c)$  leži na premici, ki gre skozi točko  $(1, 2, 3)$  in je pravokotna na ravnino  $3x + y + z - 1 = 0$ . Koliko je  $b$ ?

- A) -1      B) 1      C) 2      **D) 3**      E) 4      F) 5

6. Dan je sistem linearnih enačb

$$\begin{matrix} ax & - & 2y & = & 1 \\ -x & + & y & = & 1 \end{matrix} \text{ in vemo, da velja } \begin{bmatrix} -a & -2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kateri  $y$  ustreza rešitvi linearnega sistema enačb?

- A) -1      B) 0      C) 1      D) 2      E) 3      **F) 4**