

Rešitve poskusnega kolokvija

1. [35 točk] Dano je kompleksno število

$$a = 1 + i\sqrt{3}.$$

- (a) Poišči njegov polarni zapis $a = re^{i\varphi}$. Jasno zapiši r in φ .
- (b) Izračunaj a^{2021} .
- (c) Poišči vse rešitve enačbe $z^2 = a$.

a) Za število $a = 1 + i\sqrt{3}$ (leži v desni polravnini) velja:

$$r = |a| = \sqrt{1^2 + \sqrt{3}^2} = 2,$$

$$\varphi = \arctan \frac{\sqrt{3}}{1} = \frac{\pi}{3}.$$

Polarni zapis: $a = 2e^{i\frac{\pi}{3}}$, 15 točk

b) Od tod lahko izračunamo: 10 točk

$$a^{2021} = \left(2e^{i\frac{\pi}{3}}\right)^{2021} = 2^{2021} e^{2021i\frac{\pi}{3}} = 2^{2021} \cdot e^{-i\frac{\pi}{3}}.$$

Upoštevani so bili tudi drugi smiselni odgovori, npr.

$$a^{2021} = 2^{2020} - i 2^{2020} \sqrt{3}.$$

c) Rešitvi enačbe $z^2 = a$ sta kvadratna korena števila a . Izračunamo ju po formuli za izračun m -tih korenov kompleksnega števila a :

$$z_k = \sqrt[m]{|a|} e^{i \frac{\varphi + 2k\pi}{m}}; \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \quad ^1$$

V našem primeru je $m = 2$, rezultat pa je enak:

$$k = 0: \quad z_0 = \sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{6}}$$

$$k = 1: \quad z_1 = -\sqrt{2} e^{i \frac{\pi}{6}}$$

10 točk

Upoštevani so bili tudi drugi smiselni odgovori, npr.

$$z = \pm \left(\frac{\sqrt{6}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right)$$

Opombe. Možne so bile tudi delne plus/minus točke za delno pravilne ugotovitve. Točko c) se je z nekaj več računanja dalo rešiti tudi brez polarne zapisa, npr. s prevedbo na sistem dveh enačb, kjer sta neznanki realna in imaginarna komponenta iskanega korena. Če je bil pri točki a) pravilno izračunan r ali φ , je to štelo 5 točk. Zadnja točka pri točki b) je bila dodeljena, če je bil rezultat zapisan v poenostavljeni obliki. Če je bila pri točki c) pravilno zapisana le ena rešitev, je to štelo 5 točk. Če je bila pri reševanju s sistemom enačb pravilno izračunana le ena komponenta, je to prav tako štelo 5 točk, itd.

¹V formuli je dovolj vzeti le k med 0 in $n-1$, saj pri $k = n$ spet dobimo isto rešitev kot pri $k = 0$, pri $k = n+1$ isto kot pri $k = 1$ itn.

2. [30 točk] Ugotovi, ali naslednje vrste konvergirajo. Tiste, ki konvergirajo, tudi seštej. Odgovore dobro utemelji!

(a) $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{3^n}$

(b) $\sum_{n=0}^{\infty} 3^n$

(c) $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n$

Poišči tako število $x \in \mathbb{R}$, da bo vsota naslednje vrste enaka 3:

(d) $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Konvergenca geometrijske vrste

$$\sum_{m=0}^{\infty} a \cdot q^m$$

je odvisna od kvocienta q
(za $|q| < 1$ vrsta konvergira,
za $|q| \geq 1$ vrsta divergira).

Za $|q| < 1$ je $\sum_{m=0}^{\infty} a \cdot q^m = \frac{a}{1-q}$.

a) $q = \frac{1}{3}$, $|q| = \frac{1}{3} < 1 \Rightarrow$

vrsta konvergira. 5 točk

Njena vsota je $\sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{3^m} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$.

5 točk

$$b) q = 3, |q| = 3 > 1 \Rightarrow$$

vrsta divergira 5 točk

(Točke ste dobili tudi, če ste zapisali, da vrsta divergira, saj $\lim_{n \rightarrow \infty} 3^n \neq 0$).

$$c) q = -1, |q| = 1 \not> 1 \Rightarrow$$

vrsta divergira 5 točk

$$d) \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} = 3 \quad / \quad (1-x)$$

$$1 = 3(1-x)$$

$$1 = 3 - 3x$$

$$3x = 2$$

$$x = \frac{2}{3}$$

10 točk

3. [35 točk] Realna funkcija f ima predpis

$$f(x) = \frac{2x-1}{e^x}.$$

- Poišči definicijsko območje in ničle funkcije f .
- Določi lokalni ekstrem funkcije f . Je dobljen ekstrem minimum ali maksimum? Utemelji.
- Skiciraj graf funkcije f .
- Poišči enačbo tangente na graf funkcije f v točki $(\frac{1}{2}, f(\frac{1}{2}))$.

a) $D_f: \mathbb{R}$ 2 točki

ničle: $f(x) = 0$
$$\frac{2x-1}{e^x} = 0$$

$$2x-1=0$$

$$2x=1$$

$$x = \frac{1}{2}$$

4 točke

b) Kandidati za ekstreme: $f'(x) = 0$.

$$f'(x) = \frac{2e^x - (2x-1)e^x}{e^{2x}} = \frac{3-2x}{e^x} = 0$$

5 točk

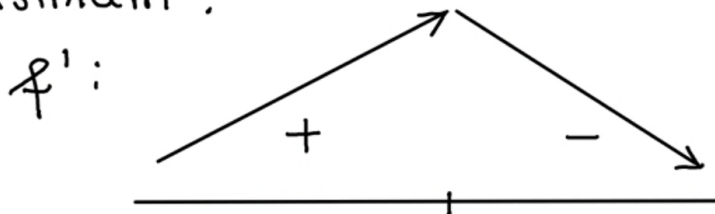
$$\frac{3-2x}{e^x} = 0$$

$$3-2x=0$$

$$x = \frac{3}{2}$$

3 točke

Pogledamo predznak odvoda levo in desno od stacionarne točke.
 Ugotovimo, da je v $x = \frac{3}{2}$ lokalni maksimum.



$$f'(0) = 3 > 0 \quad \frac{3}{2} \quad f'(2) = \frac{-1}{e^2} < 0$$

Drugi način, da ugotovimo, da je dobljena stacionarna točka maksimum, je naslednji:

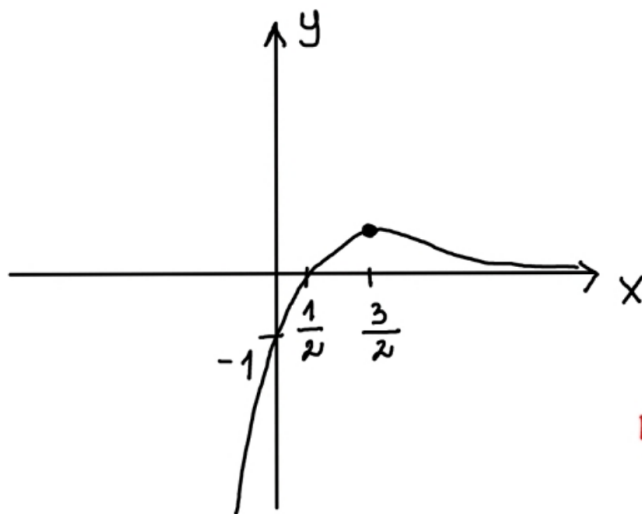
• izračunamo $f''(x) = \frac{(-2)e^x - (3-2x)e^x}{e^{2x}}$

$$= \frac{2x-5}{e^x}$$

• preverimo, da je $f''(\frac{3}{2}) < 0$.

6 točk

c)



4 točke

$$d) \left(\frac{1}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) \right)$$

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = 0 \quad 2 \text{ točki}$$

$$k_T = f'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \quad 3 \text{ točke}$$

Enačba tangente na graf funkcije
v točki $\left(\frac{1}{2}, 0\right)$:

$$y - y_0 = k_T (x - x_0) \quad 1 \text{ točka}$$

$$y = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} \left(x - \frac{1}{2}\right) \quad 3 \text{ točke}$$

$$\boxed{y = \frac{2}{e^{\frac{1}{2}}} x - \frac{1}{e^{\frac{1}{2}}}} \quad 2 \text{ točki}$$

Ime in priimek: _____

Vpisna številka: _____

Informativni 1. Kolokvij (teorija) iz Matematike, 1RI VS, FRI, December 2021

Obkrožite pravilne odgovore (lahko je več pravih). Vsaka pravilno obkrožena rešitev prinaša 10 točk. Vsaka nepravilno obkrožena rešitev prinaša -2 točki. Čas reševanja je 30 minut.

1. Rečemo, da je raztopina $p\%$, če je v 1 litru raztopine $\frac{p}{100}$ litrov alkohola in $\frac{100-p}{100}$ litrov vode. Kakšno raztopino dobimo, če zmešamo 3 litre 20% in 2 litra 30% raztopine?

- A) 23% B) 25% C) 27% D) 22% **E) 24%** F) 26%

2. Za rekurzivno podano zaporedje $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \frac{a_n}{1+a_n}$ velja

- A) da je padajoče in konvergentno** B) da je naraščajoče in konvergentno
 C) da je naraščajoče in divergentno D) da je neomejeno
E) da je omejeno F) da je padajoče in divergentno

3. Velja $a \in [-2, 3]$ in $b \in [-1, 4]$. Določite najmanjšo in največjo vrednost izraza $b - |a - 1|$.

- A) -5 in 5 B) -3 in 5 **C) -4 in 4** D) -5 in 3 E) -3 in 4 F) -3 in 3

4. Za kompleksno število $z = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{i}{2} = e^{i\frac{\pi}{6}}$ je z^{11} enako

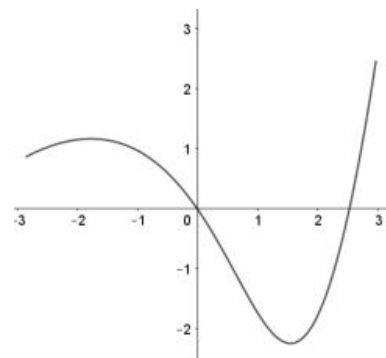
- A) 2^6 B) $\frac{\sqrt{2}}{2} - i\frac{\sqrt{2}}{2}$ C) $\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}$ D) $-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$ **E) $\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}$** F) 2^{12}

5. Za funkcijo $f(x)$ velja $f(-4) = -f(0) = 2$. Kaj velja za funkcijo $g(x) = f(x-2)$?

- A) $g(x)$ ni soda** B) $g(x)$ ni liha C) $g(0) = 2$
 D) $g(0) = -2$ **E) $g(2) = -2$** F) $g(2) = 2$

6. Na sliki je graf funkcije $f(x)$. Kaj velja za funkcijo $f(x)$?

- A) $f''(-1) > 0$ B) $f(2) > 0$ C) $f'(0) > 0$
 D) $f''(1) = 0$ **E) $f(-1) > 0$** F) $f'(-1) > 0$
 G) $f''(-1) = 0$ H) $f(1) > 0$ I) $f'(1) = 0$
 J) $f''(1) < 0$ K) $f(-1) = 0$ **L) $f'(-1) < 0$**
 M) $f''(-1) = 0$ N) $f(1) > 1$ O) $f'(1) > 0$
P) $f''(1) > 0$ R) $f(-1) = 0$ S) $f'(-1) = 0$



7. S pomočjo diferenciala, to je formule $f(x_0 + h) \doteq f(x_0) + f'(x_0) \cdot h$, bi bilo za funkcijo $f(x)$, za katero velja $f(1) = -1$ in $f'(1) = 1$, smiselno sklepati

- A) $f'(1.01) > 1$ B) $f'(1.01) < 1$ C) $f(0.99) > -1$
 D) $f'(0.99) < -1$ **E) $f(1.01) > -1$** F) $f(1.01) < -1$

Ocena:

Dodelite si 10 točk za vsako pravilno rešitev in -2 točki za vsako nepravilno rešitev. Točke seštejte. Oceno si izračunajte po ključu:

91 – 110	točk	10	(odlično)
81 – 90	točk	9	(prav dobro)
71 – 80	točk	8	(prav dobro)
61 – 70	točk	7	(dobro)
51 – 60	točk	6	(zadostno)
≤ 50	točk	5	(nezadostno)