ZAPOREDJA
$a_{n+1} - a_n \geq$ naraščanje, $\leq$ padanje

omejenost: konvergenca – če ima lim

$\lim_{n\to\infty} a_n$ ali

zaokrožimo na eno št. $a_{10}, a_{100} \ldots$

ARITMETIČNO
$1 \overset{+a}{,} 3 \overset{+a}{,} 5, \ldots$

aritmetična sredina: $\frac{a+b}{2}$

diferenca: $d = a_{n+1} - a_n$

splošni člen: $a_n = a_1 + (n-1)d$

podani 3-členi: $a_3 - a_2 = a_2 - a_1$

linearna interpolarizacija: $\hookrightarrow$ r-členi med a in b: $d = \frac{b-a}{r+1}$

vsota n-členov: $S_n = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$

$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

GEOMETRIJSKO
$2 \overset{\times 2}{,} 4 \overset{\times 2}{,} 8$

konvergentna če $|q| < 1$

količnik: $k = \frac{a_{n+1}}{a_n} \big/ \frac{a_2}{a_1}$

splošni člen: $a_n = a_1 k^{n-1}$

podani 3-členi: $\frac{a_3}{a_2} = \frac{a_2}{a_1}$ ali $a_2^2 = a_1 \cdot a_3$

$\sum_{n=c}^{\infty} a_n \cdot g^n$, $g = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

geo. interpolarizacija: $k_{1,2} = \pm \sqrt[r+1]{\frac{b}{a}}$

vsota končne: $S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$, $k \neq 1$

neskončne: $S = \frac{a_1}{1-k}$

geo. sredina: $\sqrt{a \cdot b}$

Limita zaporedja
$\lim_{n\to\infty} a_n = a$ $\quad \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

$\lim_{n\to\infty} (a_n \pm b_n) = a \pm b$ $\quad \lim_{x\to\infty} a^x = 0$ ($\lim a_n \neq 0$ divergira)

$\lim_{n\to\infty} \frac{x}{n} = 0$ $\quad \lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2} = e$ $\quad \lim_{x\to\infty} a^{-x} = 0$

$\lim_{x\to a} c \cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to a} f(x)$ $\quad \lim_{x\to 0} a^x = 1$

$\lim_{x\to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) \pm \lim_{x\to x_0} g(x)$

$\lim_{x\to x_0} c^{f(x)} = c^{\lim_{x\to x_0} f(x)}$, $c \in \mathbb{R}$

$\lim_{x\to x_0} g(f(x)) = g(\lim_{x\to x_0} f(x))$

$\lim_{x\to\infty} e^{-x} = 0$ $\quad \lim_{x\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ $\quad \lim \left(\frac{P}{P}\right)$

okolica: $a - \varepsilon < ak$ ⓒ; $ak < a + \varepsilon$ ⓒ; $\varepsilon \to$ podan; ⓐ $\to$ rezultat lim

Vrste:
$|g| \geq 1$

$\sum_{n=c}^{\infty} a_n \cdot g^n$ $\quad g = \frac{a_{n+1}}{a_n}$

$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} S_n$

$|g| < 1 \to \sum_{n=0}^{\infty} a_1 \cdot g^n = \frac{a_1}{1-g}$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

$D = b^2 - 4ac$

$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$

$a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$

Potence
eksponent: sodi, lihi

$a^0 = 1$ $\quad 0^n = 0$ $\quad (-1)^2 = 1$ $\quad (-1)^3 = -1$

$a^1 = a$ $\quad 1^n = 1$

$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$ $\quad a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

$(a \cdot b)^n = a^n \cdot b^n$ $\quad \sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$(ab)^{-n} = \frac{1}{(a \cdot b)^{+n}}$

$\frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$ $\quad (a^m)^n = a^{m \cdot n}$ $\quad a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

zaporedje na ravnini
ničle: zapo. = 0

poli = $\frac{x}{y} \Rightarrow y = 0$

začetna vrednost: 0 namesto x

$\frac{x}{x}$ → vodoravna asimptota

kompleksna števila
$z = x + iy$; Rez, Imz

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = -1$, $i^3 = -i$, $i^4 = 1$

$\bar{z} = a + bi$

$|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$

$z^2 b^2 = (a+bi)(a-bi)$

$\sqrt{-a} = i\sqrt{a}$

$i^{13} = i$ $\quad \sqrt{-1} = i$

$13 : 4$ → ostanek je novi eksponent

konjugiranje: $\bar{z} = a - bi$ → zamenjamo predznak Imz

računanje
$\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$

$|\bar{z}| = |z|$ $\quad z + \bar{z} = 2a$

$\overline{\left(\frac{z}{w}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{w}}$ $\quad z - \bar{z} = 2bi$

$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2$

$\bar{\bar{z}} = z$

$\bar{z}^n = (\bar{z})^n$

Polarni zapis
$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = r$

$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$

$x = x + iy = |z| \cdot (\cos \varphi + i \sin \varphi) = |z| \cdot e^{i\varphi}$

$z_1 z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$

$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$

1. najdi z
2. |z|
3. tan φ
4. ustaviš in poračunaš

$z^n = a$

$a = |a| e^{i\varphi}$

$2k = \sqrt[n]{|a|}$

$z^n = |z|^n (\cos(n\varphi) + i \sin(n\varphi))$

$k \in \{0, 1, 2, 3\}$

koreni kompleksnega št.
$z_k = \sqrt[n]{|a|} \cdot e^{i\frac{\varphi + 2\pi k}{n}}$, $k = 0, 1, \ldots n-1$

$w = |w| e^{i\varphi}$

$z \mapsto z + w$ (premik za w)

$z \mapsto e^{i\varphi} \cdot z$ (zasuk okoli 0,0 za φ)

$z \mapsto w \cdot z$ (razteg za w in zasuk za φ)

1. zapiši v polarni obliki
2. rešitve te enačbe $z^n = a$
3. rešitve ležijo na oglišču pravilnega n-kotnika

$|z| = r$ $\quad$ S(0,0)

$|z - a - bi| = r$ $\quad$ S(a,b)

absolutna vrednost
brez i!

$z = \sqrt{a^2 + b^2}$

$|z \cdot w| \Rightarrow$ razdalja

$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$

$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}$

Absolutna vrednost
$|a| \to$ dolžina od 0 do a

$|a| \begin{cases} a; a \geq 0 \\ -a; a < 0 \end{cases}$ $\quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|}$

$|a \cdot b| = |a| \cdot |b|$ $\quad |a^n| = |a|^n$

$|a + b| \leq |a| \pm |b|$

Procentni račun
$c \cdot \left(1 \mp \frac{p}{100}\right)$

• odstotek: $R[\%] = \frac{D \cdot 100}{c}$

c – osnova, R – relativni delež, D – delež ali procentna mera

• obrestni račun: $\Delta G = G_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot n$

ΔG – obresti, G_0 – glavnica, p – obrestna mera, n – čas obrestovanja v letih

• navadno obrestovanje: $G_n = G_0 \left(1 + \frac{p}{100} \cdot n\right)$

• obrestno obrestovanje: $G_n = G_0 \cdot r^n$; r – obrestovalni faktor

$r = 1 + \frac{p}{100}$

a – anuiteta (obrok): $a = \frac{C_0 \cdot r^n (r-1)}{r^n - 1}$

funkcije lastnosti:
→ ničle: (seka x-os) y = 0

→ začetna vrednost: (seka y-os) x = 0 / f(0)

→ definicijsko območje: „širina" $D_f = \mathbb{R}$

· koren ≥ 0 (to kar je pod korenom) ≥ 0

· log > 0 (kar je v log) > 0

· ulomki, kotne: kar je pod korenom = 0

→ injektivnost: vsak x drugačen y

→ surjektivnost: $Z_f = \mathbb{R}$

→ bijektivnost: inj + sur = bij

→ konveksnost / konkavnost:

$f''(x) > 0$ $\quad f''(x) < 0$

→ zaloga vrednosti: "višina"

→ omejenost: M, m

→ naraščanje / padanje:

$f'(x) > 0$ $\quad f'(x) < 0$

→ pozitivna / negativna:

$f(x) > 0$ $\quad f(x) < 0$

→ sodost / lihost: simetrična čez y / čez (0,0)

→ računsko ustavimo $vx, -x$

$f(x) = f(-x) \to$ soda $\quad -f(x) = f(-x) \to$ liha

→ zveznost: sklenjena, nimata oba puščice

$\lim_{x \uparrow x_0} f(x) = \lim_{x \downarrow x_0} f(x) = f(x_0)$

→ inverzna: če je bijektivna

graf: y = x; rač: 1. f(x) → y; 2. x → y; 3. y = …; 4. $y = f^{-1}(x)$

premiki
$f(x) = A \cdot x^{n-p} + g$

→ osnovna funkcija x^n

→ A: razteg / skrčitev po y-osi; −A: prezrcali čez x-os

→ p: premik po x-osi ⊕ ⊖

→ g: premik po y-osi ⊕↑ ⊖↓

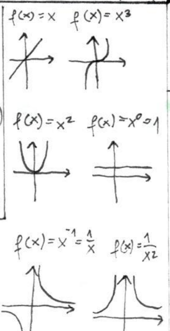
→ |f(x)|: pod x-osjo gre nad x-os

→ f(|x|): kar je na desni gre na levo

→ f(mx) = razteg / skrčitev po x-osi

Teme: $T(p, g)$ $\quad p = \frac{b}{2a}$, $g = \frac{-D}{4a}$

inverzna: preko simetrale lihih kvadrantov



Branje iz grafa
f(3) = 1

f(x) = y

linearna funkcija
$y = kx + n$

$ax + by + c = 0$

$\frac{x}{m} + \frac{y}{n} = 1$

• kot med premicama

$\tan \varphi = \left|\frac{k_2 - k_1}{1 + k_1 k_2}\right|$

• kako dobiti?

$k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ $\quad k_1 = k_2$ $\quad k_1 = -\frac{1}{k_2}$

$\tan \varphi = k$ $\quad f'(x_0) = k$

kvadratna funkcija
$f(x) = ax^2 + bx + c$

$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$

$f(x) = a(x - p^2) + g$

T(p, g)

→ ničle f(x) = 0

→ teme: $p = \frac{x_1 + x_2}{2} = \frac{-b}{2a}$

$g = f(p) = \frac{-D}{4a}$

korenska funkcija
soda: $\sqrt{x}$ $\quad$ liha: $\sqrt[3]{x}$

potenčna funkcija
$f(x) = x^n$

soda: liha:

· simetrična na y-os · na koordinatno izhodišče

· $D_f = \mathbb{R}$, $Z_f = [0, \infty)$ · $D_f = Z_f = \mathbb{R}$

soda: liha:

· graf simetričen na os y · na koordinatno

· $D_f = \mathbb{R} - \{0\}$ $Z_f = (0, \infty)$ · $D_f = Z_f = \mathbb{R} - \{0\}$

polinomi:
prosti člen = d

· splošna oblika: $p(x) = a x^3 + bx^2 + cx + d$

a = vodilni koeficient, stopnja je 3

· ničelna oblika: $p(x) = a(x - x_1)(x - x_2)(x - x_3) \ldots$

ničle = stopnja

· deljenje: $p(x) = g(x) \cdot k(x) + r$

· kako hornerjev?

vstavimo delitelj prostega člena

HORNERJEV ALGORITEM
· iskanje ničel · računanje pri danem x · deljenje polinoma

Ničle imajo ostanek y = 0

$p(x) = y$ ali $T(x, y)$

$\frac{p(x)}{k(x)}$ $\quad k(x)$ $\quad r(x)$

racionalna funkcija
$f(x) = \frac{\text{števec}}{\text{imenovalec}}$

· predznak · ničle = števec = 0 · poli = imenovalec = 0 · začetna = f(0)

· kje začnemo risat? $\frac{a}{b} > 0$ gor z desne; $\frac{a}{b} < 0$ dol z desne

· asimptota: š < i → asimptota y = 0; š > i; š = i → asimptota $y = \frac{a}{b}$

ničle lihe stopnje, ničle sode stopnje, poli lihe stopnje, poli sode stopnje

$f(x) = e^x$ $\quad f(x) = \log_{(1}$ $\quad f(x) = \ln(x)$ $\quad f(x) = \log_a$

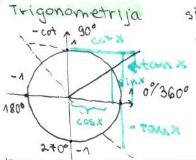
Trigonometrija
$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$

$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ $\quad \cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$

$1 + \tan^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}$

$1 + \cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}$

$\tan\alpha \cdot \cot\alpha = 1$

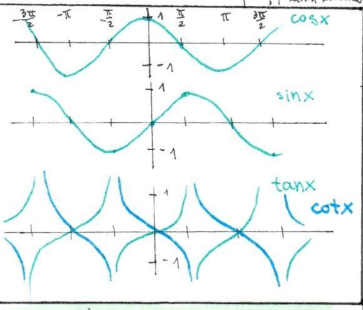


	0°	30°	45°	60°	90°
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
tan x	0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	∞
cot x	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0

$2\pi = 360°$ $\quad \frac{\pi}{3} = 60°$ $\quad \frac{\pi}{6} = 30°$

$\pi = 180°$

$\frac{\pi}{2} = 90°$ $\quad \frac{\pi}{4} = 45°$



globalni ekstremi
→ iščemo min in max na zaprtem intervalu

→ kandidati: – stacionarne točke – krajišča intervala

npr:

	f(x)
2	$f(2) = 3 \cdot 2^5 \ldots = 56$
0	$f(0) = 0$
1	$f(1) = -2$

max T(2, 56), min T(1, −2)

gledamo najmanjšo = min in največjo št = max

Kako poiščemo lokalne ekstreme?
· poiščemo kandidate: f'(x) = 0 → x =

v x je lokalni minimum: $f''(x_0) > 0$

v x je lokalni maximum: $f''(x_0) < 0$

sedla: $f''(x_0) = 0$ — gre za sedlo (+), gre za sedlo (−)

odvod
· Def. $f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$

pravila za odvajanje
$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$

$(cf)'(x) = c \cdot f'(x)$

$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g^2(x)}$, $g \neq 0$

$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

tabela odvodov
$f(x) = f'(x)$

$x^n = n x^{n-1}$

$e^x = e^x (\cdot \log e)$

$a^x = a^x \cdot \log a$

$x = 1$ $\quad C = 0$

$\log_a x = \frac{1}{x \cdot \log a}$

$\log x = \frac{1}{x (\log e)}$

$\sin x = \cos x$

$\cos x = -\sin x$

$\tan x = \frac{1}{\cos^2 x}$

$\cot x = \frac{1}{-\sin^2 x}$

$\arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arccos x = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$

$\arctan x = \frac{1}{1 + x^2}$

tangente in normale
tangenta = $(y - y_0) = f'(x_0)(x - \ldots)$, k_t

normala = $(y - y_0) = -\frac{1}{f'(x_0)}$

$k_n = -\frac{1}{k_t} = \frac{1}{f'(x_0)}$

totalni diferencial
$f(x_0 + h) = f(x_0) + h \cdot f'(x_0)$

Taylorjev polinom stopnje n
$f(x_0 + h) = \underbrace{f(x_0) + h \cdot f'(x_0)}_{\text{Taylorjev polinom stopnje 1.}} + h^2 \cdot \frac{f''(x_0)}{2!} + \frac{h^3 f'''(x_0)}{3!} \ldots + h^n \cdot \frac{f^{(n)}}{n!}$

razdalja med točkama $T_1(x_1, y_1)$, $T_2(x_2, y_2)$
$d(T_1, T_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$

· naraščanje: $f'(x) > 0$

· padanje: $f'(x) < 0$

stacionarne točke: $f'(x) = 0$ → tangenta na graf je vodoravna

integrali
· nedoločeni integral: $F(x) = \int f(x)dx$

$F'(x) = f(x)$

pravila za integrale
$\int (f(x) + g(x))dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx$

$\int c \cdot f(x)dx = c \cdot \int f(x)dx$

integrali racionalnih funkcij:
· stopnja števca < stopnja imenovalca ⇓ razcep na parcialne ulomke:

$\frac{x+6}{(x-1)(x-8)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-8} = \frac{A(x-8) + B(x-1)}{(x-1)(x-8)}$

$x + 6 = A(x-8) + B(x-1)$

$x + 6 = Ax - 8A + Bx - B$

$1 = A + B$

$6 = -8A - B$

$7 = -7A$ $\quad 1 = -1 + B$

$A = -1$ $\quad B = 2$

· stopnja števca > stopnja imenovalca ⇓ delimo števec z imenovalcem

$x^2 : (x+1) = x - 1$

$-x^2 \mp x$

$-x$

$+x + 1$

$+1$

· če sta stopnji enaki lahko uporabiš karkoli!

Elementarni integrali
$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$ (konstanta)

$\int e^x dx = e^x + C$

$\int \cos x\, dx = \sin x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$

$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| + C$

$\int \sin x\, dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

$\int 1 dx = \int dx = x + C$

računanje
→ poračunaš preden integriraš → $\int (x^6 - 2)^2 dx = \int (x^{12} - 4x^6 + 4) dx$

→ uvod nove spremenljivke → $\int \sin(3x) dx = \int \sin(u) \frac{du}{3}$

$u = 3x$, $du = 3dx$, $dx = \frac{du}{3}$ → probamo dobit enega od elementarnih

→ odvod in funkcija → $\int \sin^4 x \cos x\, dx = \int u^4 du \ldots$

$u = \sin x$, $du = \cos x dx$

→ per partes: $\int u dv = u \cdot v - \int v du$ (odvajaš, integriraš)

· gledamo kerga znamo odvajat ne pa integrirat

· kolikor je stopnja polinoma, tolikokrat je treba delat per partes → polinomski člen bo u, da mu znižamo stopnjo

~~kompozitum odvoda~~

· določeni integral
$S = \int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$

Dolžina loka krivulje
$d = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

ploščina območja med krivuljama
$S = \int_a^b (f(x) - g(x))dx$ (zgornja, spodnja)

Prostornina in površina vrtenine
prostornina = $V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$

površina = $P = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$

vektorji

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$

• množenje s skalarjem

$\alpha \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha \cdot a_1 \\ \vdots \\ \alpha \cdot a_n \end{bmatrix}$ $(\in \mathbb{R}^3)$ $2\vec{a}$, $-\vec{a}$

• seštevanje vektorjev

$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$

- vsak vektor $\vec{c}$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo dveh nekolinearnih (ne vzporednih) vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$:
  $\vec{c} = \alpha \cdot \vec{a} + \beta \cdot \vec{b}$
- če sta vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vzporedna/kolinearna, potem velja: $\vec{a} = \alpha \cdot \vec{b}$ ali $\vec{b} = \beta \cdot \vec{a}$

krajevni vektor točke T je

vektor, ali puščica od koordinatnega izhodišča do točke T

$\vec{r}_T = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$

$\vec{AB} = -\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_B - \vec{r}_A$

skalarni produkt vektorjev $\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3$

$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi$ $\Rightarrow \cos\varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$

$|\vec{a}| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}}$ dolžina vektorja $\vec{a}$ $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$

projekcija $\vec{a}$ in $\vec{b}$

$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \cdot \vec{b}$

vektorski produkt vektorjev

$\vec{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}$ in $\vec{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$

$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_2 b_3 - b_2 a_3 \\ a_3 b_1 - b_3 a_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{bmatrix}$

$S = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{2}$ pol $\triangle$

$S = |\vec{a} \times \vec{b}|$ cel $\square$

$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin\varphi$

$\vec{a} \times \vec{a} = a \cdot a \cdot \sin 0° = 0$

mešani produkt vektorjev $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$:

$(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$

$|(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})| = V_{\text{paralelograma}}$

Premice in Ravnine

premice:

$\vec{r}_T = \vec{r}_{T_0} + t \cdot \vec{s}$, $t \in \mathbb{R}$

$T(x, y, z)$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$

• vektorska oblika

$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$

• parametrična oblika

$x = x_0 + ta$

$y = y_0 + tb$ $\quad t \in \mathbb{R}$

$z = z_0 + tc$

• kanonična oblika (t_0) $\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$

ravnine:

$\vec{n} \perp \vec{T_0 T}$

$\vec{n} = \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix}$ $\vec{n} \cdot \vec{T_0 T} = 0$

$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{bmatrix} = 0$

$T(x, y, z)$, $T_0(x_0, y_0, z_0)$

$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$

$ax - ax_0 + by - by_0 + cz - cz_0 = 0$

$ax + by + cz = ax_0 + by_0 + cz_0$

$\vec{n} \cdot \vec{r}_T = \vec{n} \cdot \vec{r}_{T_0}$

$\vec{n} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \vec{n} \cdot \vec{r}_{T_0}$ → enačba ravnine

$\vec{n} = \vec{AB} \times \vec{AC}$

vsota vektorja

$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$\vec{AB} + \vec{BC} = \vec{AC}$

razlika vektorja:

$\vec{a} - \vec{b} = \vec{a} + (-\vec{b})$

Dimenzija matrike

$m \times n$

n-stolpcev

m-vrstic

$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 3×2

transponiranje matrik:

$(A_{m \times n})^T = A^T{}_{n \times m}$

$\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ 5 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$

2×3 $\quad 3 \times 2$

$(BA)^T = A^T \cdot B^T$

$a^2 = a \cdot a$

$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

SISTEMI LINEARNIH ENAČB

• gaussova eliminacija → preoblikujemo v matrico in uporabimo dovoljene operacije

↳ dovoljene operacije:

$\begin{bmatrix} \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \vdots & \cdots \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} * & & * & | & * \\ 0 & * & & | & * \\ 0 & 0 & * & | & * \end{bmatrix}$

- dve vrstici lahko zamenjamo med sabo.
- vrstico lahko pomnožimo z neničelnim številom
- vrstico lahko prištejemo/odštejemo k drugi vrstici

razširjena matrika:

$x \; y \; z$ dokler ne pridemo do

$\begin{bmatrix} * & * & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \\ 0 & 0 & * & | & * \end{bmatrix}$

beremo iz spodaj navzgor

$*x + *y + *z = *$

$*y + *z = *$

$*z = *$

$R = \{(x, y, z)\}$

če: $\begin{bmatrix} * & * & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}$ ker imamo ničelno vrstico je ∞ rešitev

če $\begin{bmatrix} * & * & * & | & * \\ 0 & * & * & | & * \\ 0 & 0 & 0 & | & * \end{bmatrix}$ takšna situacija pomeni, da ni rešitve/ravnine se $0 = *$ // ne sekajo

rang = število neničelnih vrstic po gaussu

št. neznank − rang = parametrična dolžina rešitev

operacije z matrikami:

- seštevanje/odštevanje

$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix}$

- množenje matrike z številom:

$2 \cdot \begin{bmatrix} 5 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -6 & 2 \\ 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

- množenje matrik $A_{m \times n} \cdot B_{n \times r} = (AB)_{m \times r}$

$\begin{bmatrix} 5 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \cdot 2 + 2 \cdot 3 & 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) \\ \vdots & \end{bmatrix}$

3×2 $\quad 2 \times 2$

Logaritmi

$b^{\log_b k} = k$

$\log_b m = x \Rightarrow b^x = m$

$\ln x = \log_e$

$\log_b(m) + \log_b(n) = \log_b(m \cdot n)$

$\ln e^x = x$

$\log_b(m) - \log_b(n) = \log_b\left(\frac{m}{n}\right)$

$\log 10^x = x$

$k \cdot \log_b(m) = \log_b(m^k)$

$\log_n n^x = x$

$\log_b(m) = \frac{\log m}{\log b}$

$\log_b(1) = 0$

$\log_b(b) = 1$

$\log_b(x) = \log_b(n) \rightarrow x = n$

Identična matrika:

$I_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A \cdot I = I A = A$ → kot 1 pri množenju

$(BA)^T = A^T \cdot B^T$

Inverz matrike A: A^{-1}

$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$

→ inverz matrike dobimo s pomočjo gaussove eliminacije

$[A \mid I] \sim \ldots \sim [I \mid A^{-1}]$

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

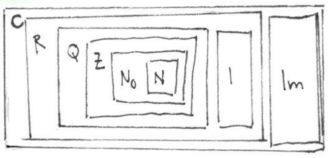
$a^2 + b^2 = (a + b - \sqrt{2ab})(a + b + \sqrt{2ab})$

$a^3 \pm b^3 = (a \pm b)(a^2 \mp ab + b^2)$

$a^4 \pm b^4 = (a \pm b)(a^3 \mp a^2 b + ab^2 \mp b^3)$

$a^5 \pm b^5 = (a \pm b)(a^4 \mp a^3 b + a^2 b^2 \mp ab^3 + b^4)$

številske množice



N - naravna $\{1, 2, 3 \ldots\}$

N_0 - naravna + 0 $\{0, 1, 2, 3 \ldots\}$

Z - cela $\{-2, -1, 0, 1, 2\}$

Q - racionalna $\{-\frac{1}{2}, \frac{2}{3} \ldots\}$

I - iracionalna $\{\pi, e, \sqrt{5}, \log 9\}$

R - realna $\{-4, -\frac{2}{3}, 0, \sqrt{3} \ldots\}$

Im - imaginarna $\{3i, -2i, \sqrt{3}i, \ldots\}$

C - kompleksna $\{3 + 2i, \sqrt{2} - \sqrt{3}i \ldots\}$

koreni

$b^n = a \Rightarrow b = \sqrt[n]{a}$

$\sqrt[n]{1} = 1$

$\sqrt[n]{0} = 0$

$\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$

$\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$

$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}$

$\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{n+m}}$

$\sqrt[n]{a} : \sqrt[m]{a} = \sqrt[mn]{a^{m-n}}$

$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^p = \sqrt[n]{a^{mp}}$

Delno korenjenje

$\sqrt[n]{a^{np} b} = a^p \cdot \sqrt[n]{b}$

Racionalizacija imenovalca:

$\frac{a}{\sqrt[n]{b^r}} = \frac{a \sqrt[n]{b^{n-r}}}{b}$

$\frac{m}{a\sqrt{b} \pm c\sqrt{d}} = \frac{m(a\sqrt{b} \mp c\sqrt{d})}{a^2 b - c^2 d}$

$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$

$(a + b + c)^3 = a^3 + b^3 + c^3 + 3a^2(b + c) + 3b^2(a + c) + 3c^2(a + b) + 6abc$

$x^2 + (m + n)x + mn = (x + m)(x + n)$

Mnogokotnik: n - št. kotov

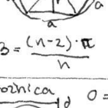
$S_n = \sum_{i=1}^{i=n} \alpha_i = (n - 2) \cdot 180°$

vsota notranjih kotov

število diagonal:

$D_n = \frac{n(n-3)}{2}$

Pravilen mnogokotnik



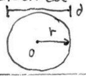
$O = n \cdot a$

$P = n \cdot \left(\frac{a^2}{4}\right) \cot\frac{\alpha}{2} = \frac{O \cdot v}{2}$

$r = \frac{a}{2 \tan\frac{\alpha}{2}}$ $\quad \alpha = \frac{2\pi}{n}$

$\beta = \frac{(n-2) \cdot \pi}{n}$ $\quad R = \frac{a}{2 \sin\frac{\alpha}{2}}$

Krožnica



$O = 2\pi r = d \cdot \pi$

$P = r^2 \pi = \frac{d^2 \pi}{4}$

$d = 2r$

trikotnik:

$\alpha + \beta + \gamma = 180°$

$\alpha' + \beta' + \gamma' = 360°$

$a^2 + b^2 = c^2$

$O = a + b + c = 2s$

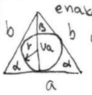
$P = \frac{a \cdot v_a}{2} = \frac{b \cdot v_b}{2} = \frac{c \cdot v_c}{2}$

$P = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$

$P = r \cdot s = \frac{abc}{4R}$

Geometrija

enakokraki $\triangle$



$O = a + 2b$ $\quad b^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + v_a^2$

$P = \frac{a \cdot v_a}{2}$ $\quad R = \frac{b^2}{2 \cdot v_a}$

$r = \frac{a \cdot v_a}{a + 2b}$

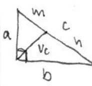
enakostranični $\triangle$

$O = 3a$ $\quad v = \frac{a\sqrt{3}}{2}$

$P = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ $\quad R = \frac{a\sqrt{3}}{3}$

$r = \frac{a\sqrt{3}}{6}$

Pravokotni $\triangle$



$O = a + b + c$ $\quad v_c = \frac{a \cdot b}{c}$

$P = \frac{c \cdot v_c}{2} = \frac{a \cdot b}{2}$ $\quad a^2 + b^2 = c^2$

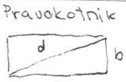
$r = \frac{a \cdot b}{a + b + c}$ $\quad R = \frac{c}{2}$ $\quad v_c^2 = m \cdot n$

$a^2 = c \cdot m$

$b^2 = c \cdot n$

$c = m + n$

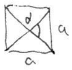
Pravokotnik



$O = 2(a + b)$

$P = a \cdot b$ $\quad d = \sqrt{a^2 + b^2}$

kvadrat

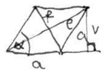


$O = 4a$

$P = a^2$

$d = a\sqrt{2}$

Romb

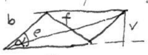


$O = 4a$

$P = \frac{e \cdot f}{2} = a \cdot v = a^2 \sin\alpha$

$e = 2a \cdot \cos\frac{\alpha}{2}$, $f = 2a \cdot \sin\frac{\alpha}{2}$

Romboid/Paralelogram

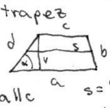


$O = 2(a + b)$

$P = a \cdot v = a \cdot b \sin\alpha$

$e^2 + f^2 = 2(a^2 + b^2)$

trapez



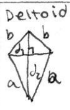
$a \parallel c$ $\quad s = \frac{a + c}{2}$

$O = a + b + c + d$

$P = v \cdot s$ $\quad v = d \cdot \sin\alpha$

$P = \frac{a + c}{2} \cdot v$

Deltoid

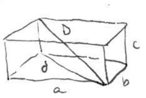


$O = 2(a + b)$

$P = \frac{d_1 \cdot d_2}{2}$

Liki

kvader:



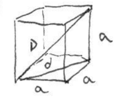
$P = 2(ab + ac + bc)$

$V = abc$

$d = \sqrt{a^2 + b^2}$

$D = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$

Kocka:



$P = 6a^2$

$V = a^3$

$d = a\sqrt{2}$

$D = a\sqrt{3}$

Piramida:

$P = O + pl$

$V = \frac{O \cdot v}{3}$

Pokončni valj:

$P = 2 \cdot O + pl$

$O = r^2 \pi$

$pl = 2\pi r v$

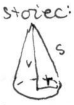
$V = r^2 \pi v$

Enakostranični valj:

$P = 6r^2\pi$

$V = 2r^3\pi$

Pokončni stožec:



$pl = \pi r s$

$P = r\pi(r + s)$

$V = \frac{r^2 \pi v}{3}$

$s = \sqrt{r^2 + v^2}$

enakostranični stožec:

$s = 2r$

$pl = 2\pi r^2$

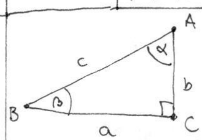
$P = 3\pi r^2$

$V = \frac{\pi r^3 \sqrt{3}}{3}$

Krogla

$P = 4r^2\pi$

$V = \frac{4}{3} r^3 \pi$



$\sin\alpha = \frac{a}{c} = \cos\beta$

$\cos\alpha = \frac{b}{c} = \sin\beta$

$\tan\alpha = \frac{a}{b} = \cot\beta$

II	I
cos− tan− / sin+ cot−	cos+ tan+ / sin+ cot+
cos− tan+ / sin− cot+	cos+ tan− / sin− cot−
III	IV

	90°	180°	270°	360°
sin	1	0	−1	0
cos	0	−1	0	1
tan	±∞	0	±∞	0
cot				