Kompleksna števila

$i^0 = 1$, $i^1 = i$, $i^2 = \sqrt{-1}$, $i^3 = -1$

$|z| = \sqrt{(z * con(z))}$

$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$

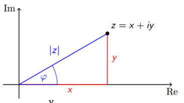
z = x+iy , $\underline{z}$ = x-iy

$\underline{z1 + z2} = \underline{z1} + \underline{z2}$

$\underline{z1*z2} = \underline{z1} * \underline{z2}$

z + $\underline{z}$ = 2Re , z − $\underline{z}$ = 2i Im

$|\underline{z}|$ = |z| , |z1*z2| = |z1||z2|



$\tan\varphi = \frac{y}{x}$

x = |z| cos ϕ y = |z| sin ϕ

Polarni zapis:

$z = |z| * (\cos\varphi + \sin\varphi * i)$

$e^{\varphi * i} = \cos\varphi + \sin\varphi * i$

$z = |z| * e^{i\varphi}$

Koreni

$z_k = \sqrt[n]{|a|} * e^{\frac{\varphi + 2k\pi}{n}}$

θ	0°	30°	45°	60°
sin θ	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
cos θ	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$
tan θ	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$
cot θ	Not defined	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
sec θ	1	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{2}$	2
cosec θ	Not defined	2	$\sqrt{2}$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$

Zaporedja

$a = \lim_{n\to\infty} a_n$, če za vsak ε > 0 obstaja tak indeks, da za vsak n ≥ N velja

$|a - a_n| < \varepsilon$

$e = \lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

$e^{-1} = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right)^n$

Računanje limit

Naj bo:

$\lim_{n\to\infty} a_n$ = a in $\lim_{n\to\infty} b_n$ = b

$\lim_{n\to\infty}(a_n + b_n) = a + b$

$\lim_{n\to\infty}(a_n b_n) = ab$

Če je $b_n \neq 0$ in $b \neq 0$, potem:

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$

Če je $a_n > 0$ in a > 0, potem:

$\lim_{n\to\infty} a_n^{b_n} = a^b$

Vrste

Če |q| < 1 konvergira:

$S = \frac{a_1}{1-q}$ (neskončna)

$S_n = \frac{a_1(k^n - 1)}{k-1}$ (končna)

Če je konvergentna potem:

$\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ (pogoj ni dovolj)

Funkcije

Funkcija $f(x)$ je

- *soda*, če je $f(-x) = f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$
- *liha*, če je $f(-x) = -f(x)$ za vsak $x \in \mathcal{D}_f$.

Velja:

- graf sode funkcije je simetričen glede na os y, graf lihe pa glede na koordinatno izhodišče
- vsota sodih funkcij je soda funkcija, vsota lihih je liha funkcija
- produkt dveh sodih ali dveh lihih funkcij je soda funkcija, produkt lihe in sode funkcije je liha funkcija

Injektivne in surjektivne funkcije

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *injektivna*, če različni točki $x \neq y \in \mathcal{D}_f$ preslika v različni vrednosti $f(x) \neq f(y) \in \mathcal{Z}_f$.

- Graf injektivne funkcije seka poljubno vodoravno premico v največ eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *surjektivna*, če je $\mathcal{Z}_f = \mathbb{R}$.

- Vsaka vodoravna premica seka graf surjektivne funkcije v vsaj eni točki.

Funkcija $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ je *bijektivna*, če je injektivna in surjektivna.

Kompozitum ali sestavljena funkcija

Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ in $g : \mathcal{D}_g \to \mathbb{R}$. Če je $\mathcal{Z}_f \subseteq \mathcal{D}_g$, potem funkcijo $g \circ f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$, definirano s predpisom

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)),$$

in imenujemo *kompozitum* funkcij g in f.

V splošnem $f \circ g \neq g \circ f$.

Inverzna funkcija

Naj bo $f : \mathcal{D}_f \to \mathbb{R}$ injektivna funkcija. Potem funkcijo $f^{-1} : \mathcal{Z}_f \to \mathcal{D}_f$, za katero velja

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x$$

za vsak $x \in \mathcal{D}_f$, imenujemo *inverzna funkcija* funkcije f.

- Ekvivalentno: $f^{-1}(x) = y \Leftrightarrow f(y) = x$.
- Definicijsko območje in zaloga vrednosti se zamenjata: $D_{f^{-1}} = Z_f$, $Z_{f^{-1}} = D_f$.
- Inverzno funkcijo f^{-1} eksplicitno podane funkcije f izračunamo tako, da zamenjamo vlogi spremenljivk $y = f(x)$, torej $x = f(y)$, in nato izrazimo y kot funkcijo x.
- Graf inverzne funkcije f^{-1} dobimo tako, da prezrcalimo graf funkcije f prek simetrale lihih kvadrantov.

Transformacije funkcij

- $g(x) = f(x - a)$ vodoravni premik za a v desno
- $g(x) = f(x) + c$ navpični premik za c navzgor
- $g(x) = f(\frac{x}{a})$ vodoravni razteg za faktor a
- $g(x) = cf(x)$ navpični razteg za faktor c
- $g(x) = -f(x)$ zrcaljenje preko osi x
- $g(x) = f(-x)$ zrcaljenje preko osi y

Limita funkcije

Zanima nas, kako se funkcija f obnaša v okolici točke a, torej na intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ za nek $\delta > 0$, razen morda v točki a.

Število L je *limita* funkcije f v točki a, če za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je $|f(x) - L| < \varepsilon$, če je $0 < |x - a| < \delta$.
L je limita funkcije f v točki a: vrednost $f(x)$ je poljubno blizu L, če je le x dovolj blizu a (a ne enak a).

Pišemo:

$$L = \lim_{x\to a} f(x)$$

Limita funkcije f v točki a ni odvisna od vrednosti funkcije f v točki a.

Limita funkcije in limita zaporedja

Funkcija f ima v točki a limito L natanko tedaj, ko za vsako zaporedje $(a_n)_n$, ki konvergira proti a (ter ne vsebuje a) velja $\lim_{n\to\infty} f(a_n) = L$.

Za računanje limit veljajo enaka pravila kot pri zaporedjih. Naj bo $\lim_{x\to a} f(x) = L$ in $\lim_{x\to a} g(x) = K$. Potem je

- $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + K$
- $\lim_{x\to a}(\alpha f(x)) = \alpha L$ za vsak $\alpha \in \mathbb{R}$
- $\lim_{x\to a} f(x)g(x) = LK$
- če je $K \neq 0$, je $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{K}$.

Izrek

Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je v točki $a \in \mathcal{D}$ zvezna, natanko tedaj, ko za vsak $\varepsilon > 0$ obstaja tak $\delta > 0$, da je

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon,$$

če je $|x - a| < \delta$.

Opis zveznosti

- *Vse* elementarne funkcije so zvezne povsod, kjer so definirane.
- Kompozitumi zveznih funkcij so zvezne funkcije, kjer so definirani.
- Če je podatek a podan dovolj natančno (z napako manjšo od δ), bo vrednost $f(a)$ izračunana z napako manjšo od ε.
- Graf zvezne funkcije bo v točki $(a, f(a))$ "nepretrgana krivulja".
- Če vrednost $f(a)$ ni definirana, vendar obstaja $L = \lim_{x\to a} f(x)$, lahko funkcijo f *razširimo*, tako da definiramo $f(a) = L$. Tako razširjena funkcija je zvezna v točki a.

Izrek

Če je $\lim_{x\to a} g(x) = L$ in je funkcija f zvezna v točki L, je

$$\lim_{x\to a}(f \circ g)(x) = f(L).$$

Torej lahko zamenjamo vrsti red računanja limite in vrednosti zvezne funkcije.

Ničle zveznih funkcij

Izrek

Če je f zvezna na zaprtem omejenem intervalu $[a, b]$ in je $f(a)f(b) < 0$, tj. f v krajiščih intervala sta predznaka različna, potem obstaja točka $c \in (a, b)$, kjer je $f(c) = 0$.

Dokaz z *bisekcijo*: definiramo tri zaporedja, a_n, b_n in c_n

- $a_0 = a$, $b_0 = b$
- $c_n = (a_n + b_n)/2$, to je razpolovišče intervala $[a_n, b_n]$ za vsak n
- a_{n+1} in b_{n+1} pa sta krajišči tiste polovice intervala $[a_n, b_n]$, kjer ima f v krajiščih različna predznaka.

Če za kakšen c_n velja $f(c_n) = 0$, je $c = c_n$. Sicer pa:

- zaporedja a_n, b_n in c_n vsa konvergirajo k istemu številu c,
- $f(c) = 0$.

Polinomi

Polinom stopnje n

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

kjer $a_n \neq 0$, $a_i \in \mathbb{R}$

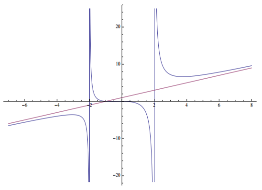
- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$. $\mathcal{Z}_f$ odvisno od polinoma: $\mathbb{R}$ za polinome lihe stopnje.
- Polinom ima kvečjemu n realnih ničel. Razcep:
  - na linearne in nerazcepne kvadratne faktorje s koeficienti v $\mathbb{R}$
  - na linearne faktorje s koeficienti v $\mathbb{C}$

Racionalna funkcija

Racionalna funkcija

$$r(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{a_0 + \cdots + a_n x^n}{b_0 + \cdots + b_m x^m}.$$

- *Okrajšana oblika*: števec in imenovalec nimata skupnih faktorjev.
- Definicijsko območje: $\mathcal{D}_r = \mathbb{R} \setminus \{\text{poli}\}$
- poli $r(x)$: ničle imenovalca
- ničle $r(x)$: ničle števca
- $r(x)$ se v neskončnosti približuje polinomu $s(x)$, kjer je $p(x) = s(x)q(x) + o(x)$. (Deljenje polinomov)

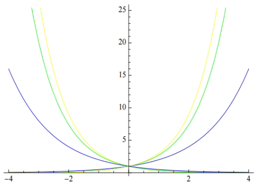


Sprememba predznaka: ničle ter poli lihe stopnje.

Eksponentna funkcija in logaritem

Eksponentna funkcija: $f(x) = a^x$, $a > 0$

- $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$, $\mathcal{Z}_f = (0, \infty)$,
- injektivna za vsak $a \neq 1$:

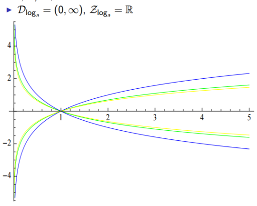


Slika : $f(x) = a^x$ za $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{e}, \frac{1}{2}, 2, e, 3$

- $a^0 = 1$ za vse a
- za $a > 1$ je naraščajoča
- za $0 < a < 1$, je padajoča.
- adicijski izrek: $a^{x+y} = a^x a^y$
- najpogosteje uporabljamo osnovo e

Inverzna funkcija eksponentni je *logaritem* $f^{-1}(x) = \log_a x$, $a > 0, a \neq 1$,

- $\mathcal{D}_{\log_a} = (0, \infty)$, $\mathcal{Z}_{\log_a} = \mathbb{R}$



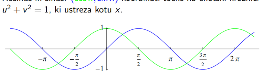
Slika : $f(x) = \log_a x$ za $a = \frac{1}{3}, \frac{1}{e}, \frac{1}{2}, 2, e, 3$

- $\log_a 1 = 0$
- za $a > 1$, je $\log_a$ naraščajoča
- za $0 < a < 1$ je $\log_a$ padajoča.
- najpogosteje uporabljamo $a = e$, *naravni logaritem*

$$\log_e x = \log x = \ln x$$

- adicijski izrek: $\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$

Kosinus in sinus: ($\cos x, \sin x$) koordinati točke na enotski krožnici $u^2 + v^2 = 1$, ki ustreza kotu x.



- obe sta periodični z osnovno periodo 2π:

$$\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \quad \cos(x + 2\pi) = \cos(x)$$

- omejeni: $\mathcal{Z}_{\sin} = \mathcal{Z}_{\cos} = [-1, 1]$

Med kotnimi funkcijami veljajo številne zveze, na primer:

- $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
- $\cos(\frac{\pi}{2} - x) = \sin x$
- $\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
- $\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Tangens in kotangens:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$$

(tudi tg x in ctg x),

- $\mathcal{D}_{\tan} = \mathbb{R} \setminus \{\frac{\pi}{2} + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$, $\mathcal{D}_{\cot} = \mathbb{R} \setminus \{\pi + k\pi : k \in \mathbb{Z}\}$
- obe sta periodični z osnovno periodo π:

$$\tan(x + \pi) = \tan(x), \quad \cot(x + \pi) = \tan(x)$$

- neomejeni: $\mathcal{Z}_{\tan} = \mathcal{Z}_{\cot} = \mathbb{R}$
-
  - $\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$
  - $\cot x = \frac{1}{\tan x}$

1. Periodičnost

$\sin(x + 2\pi) = \sin x$ $\cos(x + 2\pi) = \cos x$
$\tan(x + \pi) = \tan x$ $\cot(x + \pi) = \cot x$

2. Sodost, lihost

$\sin(-x) = -\sin x$ $\cos(-x) = \cos x$
$\tan(-x) = -\tan x$ $\cot(x) = -\cot x$

3. Zveze med kotnimi funkcijami

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$
$1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$ $1 + \cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}$

4. Prehodi med koti

$\sin(\frac{\pi}{2} + x) = \cos x$ $\sin(\pi + x) = -\sin x$
$\cos(\frac{\pi}{2} + x) = -\sin x$ $\cos(\pi + x) = -\cos x$
$\tan(\frac{\pi}{2} + x) = -\cot x$

5. Adicijski izreki

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$
$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$
$\tan(x + y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$
$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$
$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$
$\tan(x - y) = \frac{\tan x - \tan y}{1 + \tan x \tan y}$

6. Dvojni in polovični koti

$\sin(2x) = 2\sin x \cos x$ $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$ $\cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$
$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1 - \tan^2 x}$ $\tan x = \frac{1 - \cos 2x}{\sin 2x}$

7. Produkti in vsote

$\sin x + \sin y = 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x + \cos y = 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$
$\cos x - \cos y = -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}$
$\sin x \sin y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) - \cos(x + y))$
$\cos x \cos y = \frac{1}{2}(\cos(x - y) + \cos(x + y))$
$\sin x \cos y = \frac{1}{2}(\sin(x - y) + \sin(x + y))$

Diferenčni kvocient

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$

- Sprememba $x_0 \to x_0 + h$ povzroči spremembo $f(x_0) \to f(x_0 + h)$
- Hitrost spreminjanja nam pove kvocient

$$\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

in ga imenujemo *diferenčni kvocient* funkcije f v točki x_0.

- Diferenčni kvocient je enak smernemu koeficientu premice sekante skozi točki $(x_0, f(x_0))$ in $(x_0 + h, f(x_0 + h))$.

Odvod

Definicija

Odvod funkcije f v točki x_0 je limita diferenčnega kvocienta

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}.$$

Funkcija je odvedljiva v točki x_0, če obstaja $f'(x_0)$.
Funkcija $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ je odvedljiva na $\mathcal{D}$, če je odvedljiva v vsaki točki $x_0 \in \mathcal{D}$.

Odvod $f'(x_0)$ je

- relativna sprememba vrednosti $f(x_0)$, če se vrednost spremenljivke x_0 malce spremeni
- smerni koeficient tangente na graf v točki $(x_0, f(x_0))$.

Če je f odvedljiva v točki x_0, potem je v x_0 tudi zvezna.
Če je f zvezna v točki x_0, potem v x_0 ni nujno odvedljiva.

Pravila za računanje odvodov

Če sta f in g odvedljivi funkciji, potem velja

- $(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x)$
- $(\alpha f)'(x) = \alpha f'(x)$
- $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$, kjer $g(x) \neq 0$
- $(f \circ g)'(x) = f'(g(x))g'(x)$ … *posredno odvajanje* funkcij
- $(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}$, kjer $f'(x) \neq 0$.

Tabele elementarnih odvodov

f(x)	f'(x)
x^α	$\alpha x^{\alpha-1}$
e^x	e^x
a^x	$a^x \log a$
$\log x$	$\frac{1}{x}$
$\log_a x$	$\frac{1}{x \log a}$
$\sin x$	$\cos x$
$\cos x$	$-\sin x$
$\tan x$	$\frac{1}{\cos^2 x}$
$\cot x$	$-\frac{1}{(\sin x)^2}$
$\arcsin x$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
$\arctan x$	$\frac{1}{1+x^2}$

Naraščanje in padanje funkcij

$f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva in $x_0 \in (a, b)$

- Če je $f'(x_0) > 0$, je f v točki x_0 naraščajoča.
- Če je $f'(x_0) < 0$, je f v točki x_0 padajoča.
- Kaj se zgodi, če je $f'(a) = 0$?

Definicija

Če je $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ odvedljiva potem točko $x_0 \in (a, b)$, kjer je $f'(x_0) = 0$ imenujemo stacionarna (ali kritična točka) funkcije f.

V stacionarni točki je tangenta na graf vodoravna.

Lokalni ekstremi

Definicija

Funkcija f ima v točki x_0 lokalni maksimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \leq f(x_0)$ za vsak x, ki je oddaljen od x_0 za manj kot δ.
Funkcija f ima v točki x_0 lokalni minimum, če obstaja tak $\delta > 0$, da je $f(x) \geq f(x_0)$ za vsak x, ki je oddaljen od x_0 za manj kot δ.
Lokalni ekstrem … lokalni minimum ali lokalni maksimum.

Potreben pogoj za lokalni ekstrem

Izrek

Če je funkcija $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ v točki $x_0 \in (a, b)$ odvedljiva in ima v x_0 lokalni ekstrem, potem je x_0 stacionarna točka funkcije f.

- Pogoj $f'(x_0) = 0$ je za odvedljive funkcije *potreben pogoj* za lokalni ekstrem v točki x_0.
- Če $f'(x_0) = 0$ v točki $x_0 \in (a, b)$, ni nujno, da ima f v x_0 tudi lokalni ekstrem.
- Lokalne ekstreme iščemo med stacionarnimi točkami, drugje lokalnih ekstremov ni.
- Primer: $f(x) = x^3$, točka $x_0 = 0$ je stacionarna točka, vendar $f(0) = 0$ ni lokalni ekstrem.

Funkcija ima v stacionarni točki x_0 lokalni ektrem, če odvod f' ob prehodu skozi x_0 spremeni predznak.

V točki x_0 je

- *lokalni minimum*, če $f'(x) < 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) > 0$ za $x > x_0$.
- *lokalni maksimum*, če $f'(x) > 0$ za $x < x_0$ in $f'(x) < 0$ za $x > x_0$.

Višji odvodi

$f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva

- Če $f' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f *dvakrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, odvod funkcije f' pa zapišemo kot

$$f''(x) = (f')'(x)$$

in imenujemo *drugi odvod* funkcije f.

- Če $f'' : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ odvedljiva, potem je f *trikrat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, $f'''(x) = (f'')'(x)$ imenujemo *tretji odvod* funkcije f.
- Če lahko funkcijo f n-krat odvajamo na $\mathcal{D}$, potem pravimo, da je funkcija f *n-krat odvedljiva* na $\mathcal{D}$, *n-ti odvod* funkcije f pa označimo z

$$f^{(n)} = (f^{(n-1)})'(x).$$

- Funkcije, ki jih lahko poljubnokrat odvajamo, imenujemo *neskončnokrat odvedljive* funkcije.

Izrek

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ (vsaj) dvakrat odvedljiva funkcija in $x_0 \in (a, b)$ stacionarna točka funkcije f.

- *Če $f''(x_0) > 0$, potem je v x_0 lokalni minimum.*
- *Če $f''(x_0) < 0$, potem je v x_0 lokalni maksimum.*

Uporaba odvodov za risanje grafov

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ dvakrat odvedljiva

- Prvi odvod nam pove, kje funkcija narašča, kje pada in kje so stacionarne točke,
- Drugi odvod pove, kako se graf krivi:
  - kjer je $f''(x) \geq 0$, je f *konveksna*, graf funkcije f leži nad tangento grafa
  - če je $f''(x) \leq 0$, je f *konkavna*, graf funkcije f leži pod tangento grafa

L'Hospitalovo pravilo

f in g odvedljivi na intervalu (a, b), $g'(x) \neq 0$.

- Če je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = 0$, je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Če je $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} g(x) = \infty$, je

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

- Pravili veljata tudi za enostranski limiti, ko gre $x \to \infty$ ali $x \to -\infty$.

Integral

Definicija

Naj bo $f : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$, kjer $\mathcal{D} \subseteq \mathbb{R}$ odprti interval. Če za $F : \mathcal{D} \to \mathbb{R}$ velja

$$F'(x) = f(x)$$

za vse $x \in \mathcal{D}$, potem F imenujemo nedoločeni integral ali primitivna funkcija funkcije f.

Pišemo: $F(x) = \int f(x)\,dx$.

Nedoločeni integral je določen le do konstante natanko. Če je $F'(x) = f(x)$, potem

- velja $(F(x) + C)' = f(x)$ za vse $C \in \mathbb{R}$,
- za vsak nedoločeni integral G funkcije f velja $G(x) = F(x) + D$ za nek $D \in \mathbb{R}$.

Elementarni integrali

Iz tabele elementarnih odvodov dobimo:

$\int x^\alpha\,dx = \frac{1}{\alpha + 1}x^{\alpha+1} + C, \alpha \neq -1$ $\int x^{-1}\,dx = \log|x| + C$

$\int e^x\,dx = e^x + C$

$\int \cos x\,dx = \sin x + C$ $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$

$\int \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin x + C$ $\int \frac{dx}{1 + x^2} = \arctan x + C$

Pravila za računanje nedoločenih integralov

1. linearnost:

$$\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$$

$$\int \alpha f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$$

2. vpeljava nove spremenljivke:

$$\int f(u(x))u'(x)\,dx = \int f(u)\,du$$

3. integriranje po delih (per partes)

$$\int u(x)v'(x)\,dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x)\,dx$$

oziroma

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

Določeni integral pozitivne zvezne funkcije f na intervalu $[a, b]$ je ploščina območja med x-osjo in grafom $y = f(x)$ na intervalu $[a, b]$.

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
  Interval $[a, b]$ razdelimo na n intervalov enake dolžine $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n - 1$,

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

vsak je širine $\delta_n = \frac{b - a}{n}$

- Za vsak $k = 0, 1, \ldots, n - 1$ izberemo $c_k \in [x_{k-1}, x_k]$.
- *Integralska vsota* funkcije f: $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$.

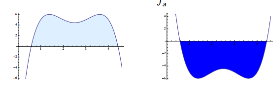
Za zvezne funkcije velja, da zaporedje integralskih vsot konvergira, ko gre $n \to \infty$ in je limita vedno enaka, ne glede na to, kako izberemo točke c_k.

Določeni integral funkcije $f(x)$ na $[a, b]$ je enak:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\delta_n$$

Naj bo P ploščina lika med grafom in intervalom $[a, b]$ na osi x.

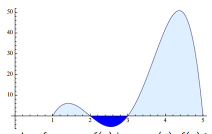
- Če je $f(x) \geq 0$ za vse $x \in [a, b]$, je $P = \int_a^b f(x)\,dx$,
- če je $f(x) \leq 0$ na $[a, b]$, je $P = -\int_a^b f(x)\,dx$.



V splošnem je integral *predznačena ploščina*, tj.

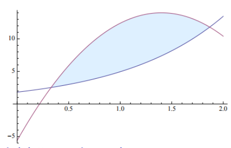
$$\int_a^b f(x)\,dx = P_1 - P_2,$$

kjer je P_1 ploščina dela nad osjo x in P_2 ploščina dela pod osjo x.



Ploščina med grafoma $y = f(x)$ in $y = g(x)$, $f(x) \geq g(x)$ za $x \in [a, b]$, je enaka

$$P = \int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$$



Lastnosti določenega integrala

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrabilna.

1. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b f(t)\,dt$
2. $\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$
3. $\int_a^a f(x)\,dx = 0$
4. Linearnost:

$$\int_a^b (f(x) + g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b \alpha f(x)\,dx = \alpha \int_a^b f(x)\,dx$$

5. $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$ za vse $c \in [a, b]$
6. Če je f liha, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.
7. Če je f soda, je $\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.
8. Monotonost: Če je $f(x) \leq g(x)$ na $[a, b]$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$$

9. $\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$
10. Če je $m = \min\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$ in $M = \max\{f(x) \mid x \in [a, b]\}$, je

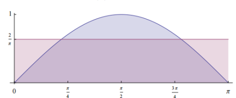
$$m(b - a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b - a)$$

Povprečna vrednost funkcije

Povprečna vrednost funkcije f na intervalu $[a, b]$ je

$$\mu = \frac{1}{b - a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

μ : višina pravokotnika z osnovnico $[a, b]$, ki ima ploščino enako kot območje pod grafom $y = f(x)$.



Zveza med določenim in nedoločenim integralom

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$ zvezna. Torej je f je zvezna (in zato integrabilna) na vsakem intervalu $[a, x]$, $x \in [a, b]$.

Izrek (Osnovni izrek integralskega računa)

Če je f zvezna na $[a, b]$, je funkcija

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

zvezna in odvedljiva na $[a, b]$ in velja

$$F'(x) = f(x).$$

Funkcija F je torej *nedoločeni integral* funkcije f na $[a, b]$.

Newton-Leibnizova formula za računanje določenih integralov:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a) = F(x)\Big|_a^b = [F(x)]_a^b,$$

kjer je F nedoločeni integral funkcije f.

Pravila za računanje določenih integralov

Vpeljava nove spremenljivke

Če je u zvezno odvedljiva na $[a, b]$ ter f zvezna na $\mathcal{Z}_u$, potem je

$$\int_a^b f(u(x))u'(x)\,dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)\,du.$$

Integriranje po delih: Če sta u, v odvedljivi na $[a, b]$, potem je

$$\int_a^b u(x)v'(x)\,dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)\,dx.$$

Uporaba integrala

- Ploščine likov omejenih s krivuljami …
- Pot, hitrost, pospešek ter prehod med njimi.
- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ pozitivna funkcija. Naj bo T vrtenina, dobljena z vrtenjem grafa f okoli x osi na $[a, b]$.

prostornina: $V(T) = \pi\int_a^b f^2(x)dx$

površina plašča: $P(T) = 2\pi\int_a^b f(x)\sqrt{1 + (f'(x))^2}dx$

- Dolžina loka grafa $y = f(x)$, $a \leq x \leq b$:

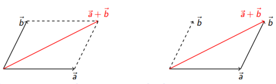
$$\ell = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx$$

Integral na neomejenem intervalu

- $f(x)$ zvezna na $[a, \infty)$
- $\lim_{t\to\infty}\int_a^t f(x)\,dx = \int_a^\infty f(x)\,dx$
- Integral ne obstaja vedno!
- Podobno: $\lim_{t\to-\infty}\int_t^b f(x)\,dx = \int_{-\infty}^b f(x)\,dx.$

Seštevanje vektorjev

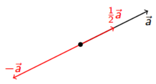
$$\vec{a} + \vec{b} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ \vdots \\ a_n + b_n \end{bmatrix}$$



Množenje vektorjev s skalarji

$\alpha \in \mathbb{R}$ skalar

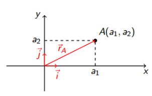
$$\alpha\vec{a} = \alpha\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_1 \\ \alpha a_2 \\ \vdots \\ \alpha a_n \end{bmatrix}$$



1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $\left(\vec{a} + \vec{b}\right) + \vec{c} = \vec{a} + \left(\vec{b} + \vec{c}\right)$
3. $\vec{0} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$ in velja
   - $\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$
   - $\vec{a} + (-1)\vec{a} = \vec{0}$
4. $\alpha(\beta\vec{a}) = (\alpha\beta)\vec{a}$ za vse $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

Vektorji v ravnini

Ravnino $\mathbb{R}^2$ si predstavljamo opremljeno s *koordinatnim sistemom*.



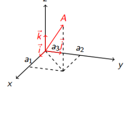
Vektor v $\mathbb{R}^2$ … stolpec dveh realnih števil

$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j}$$

je *krajevni vektor* točke A.

Vektorji v prostoru

Prostor $\mathbb{R}^3$ si predstavljamo opremljen s *koordinatnim sistemom*.



$$\vec{r}_A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = a_1\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + a_2\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + a_3\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}$$

Kolinearnost in linearna kombinacija vektorjev

Vektorja $\vec{a}$ in $\vec{b}$ sta *kolinearna* (tudi *vzporedna*), če obstaja tak skalar α, da je

$$\vec{a} = \alpha\vec{b} \quad \text{ali} \quad \vec{b} = \alpha\vec{a}.$$

Če so $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$ vektorji iz prostora $\mathbb{R}^3$ in $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m \in \mathbb{R}$ skalarji, je vektor

$$\vec{c} = \alpha_1\vec{a}_1 + \alpha_2\vec{a}_2 + \cdots + \alpha_m\vec{a}_m$$

linearna kombinacija vektorjev $\vec{a}_1, \vec{a}_2, \ldots, \vec{a}_m$.

Izrek

Naj bosta $\vec{a}$ in $\vec{b}$ nekolinearna vektorja. Vsak vektor $\vec{c} \in \mathbb{R}^2$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$.

Izrek

Naj bodo $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$ vektorji, ki ne ležijo v isti ravnini. Vsak vektor $\vec{d} \in \mathbb{R}^3$ lahko zapišemo kot linearno kombinacijo treh vektorjev $\vec{a}$, $\vec{b}$ in $\vec{c}$.