UNIVERZA V LJUBLJANI
FAKULTETA ZA RAČUNALNIŠTVO IN INFORMATIKO
LABORATORIJ ZA MATEMATIČNE METODE V RAČUNALNIŠTVU
IN INFORMATIKI

Martin Vuk in Gregor Jerše

ZBIRKA VAJ IZ MATEMATIKE

Študijsko gradivo

Ljubljana, 2018

Uvod

Na naslednjih straneh so zbrane naloge, ki so se pojavljale na vajah pri predmetu Matematika za študente visokega strokovnega študija računalništva in informatike na FRI. Dodane so tudi naloge s kolokvijev od leta 20** dalje.

Pri sestavljanju nalog so sodelovali številni asistenti, ki so na FRI poučevali ta predmet, za kar se jim zahvaljujeva. Posebej so k nalogam prispevali Damir Franetič, Leon Lampret, Janoš Vidali, Damjan Vrenčur in drugi.

Za vse naloge v gradivu so na koncu poglavij na voljo rezultati. Izbrane naloge imajo tudi podrobno razdelane rešitve.

Math. Subj. Class. (2010**):** 97H60, 26A06

Oznake

$\vec(a)$ ... vektor a

$\mathbb{R}$ ... realna števila

Kazalo

Del 1

Matematična analiza

POGLAVJE 1

Enačbe in neenačbe

NALOGA 1. $\mathcal{OR}$
Novembra 2008 je v Zimbabveju hiperinflacija dosegla višek, ko je bila mesečna stopnja inflacije kar $79,600,000,000\%$. Za koliko procentov je dnevno padla vrednost valute? Za koliko procentov je padla vrednost valute vsako uro?

NALOGA 2. $\mathcal{OR}$
Višina BDP na Kitajskem naj bi v prihodnjih letih rastla 6.00% na leto, medtem ko je predvidena letna rast GDP Slovenije 1.50%. Po kolikih letih bo Kitajska dosegla enako vrednost BDP na prebivalca kot Slovenija. V letu 2015 je vrednost GDP na prebivalca za Slovenijo znašala približno $20,000\$$, za Kitajsko pa $8,000\$$.

NALOGA 3. $\mathcal{OR}$
Poišči vse (!) rešitve naslednjih enačb:

a. $x + \dfrac{1}{x} = 2,$
b. $x^3 + x^2 - x - 1 = 0,$
c. $|x+1| = \dfrac{1}{2}x + 1.$

NALOGA 4. $\mathcal{OR}$
Reši naslednje neenačbe:

a. $x > \dfrac{1}{x}$
b. $x^2 \leq 3x - 2,$
c. $\sin(x) > \dfrac{1}{2}$ za $x \in [0, 2\pi),$
d. $|x-1| < 1,$
e. $|x-1| > |x| - 2,$

NALOGA 5. $\mathcal{OR}$
Reši naslednje sisteme enačb

a. $a - b = 2, ab = 1$
b. $x^2 + y^2 = 1, x^2 - y^2 = 2x$

NALOGA 6. $\mathcal{OR}$
Za ostri kot α je $\tan\alpha = 2$. Izračunaj $\sin(\alpha)$ in $\cos(\alpha)$.

NALOGA 7. $\mathcal{OR}$
Študent Marko bo začel prodajati aplikacijo za mobilni telefon in bi rad zaslužil vsaj 500EUR. Ocenjuje, da bo število uporabnikov, ki bi aplikacijo kupilo za določeno ceno c približno enako

$$\frac{1500}{c^2+2}.$$

Določi razpon cene, pri kateri bo Marko dosegel svoj cilj.

Rezultati: Enačbe in neenačbe

REZULTATI NALOGE 1. $\mathcal{N}$

Dnevna inflacija je bila 98.01%. Urna inflacija je bila 2.89%.

REZULTATI NALOGE 2. $\mathcal{N}$

Kitajska bo Slovenijo po BDP ujela čez 21.12 leta.

REZULTATI NALOGE 3. $\mathcal{N}$

a. 1
b. $-1, 1$
c. $-\frac{4}{3}, 0$

REZULTATI NALOGE 4. $\mathcal{N}$

a. $(-1 < x \wedge x < 0) \vee 1 < x$
b. $1 \leq x \wedge x \leq 2$
c. $\frac{\pi}{6} < x \wedge x < \frac{5\pi}{6}$
d. $0 < x \wedge x < 2$
e. $-\infty < x \wedge x < \infty$

REZULTATI NALOGE 5. $\mathcal{N}$

a. $\left\{a : 1 - \sqrt{2},\ b : -\sqrt{2} - 1\right\}, \left\{a : 1 + \sqrt{2},\ b : -1 + \sqrt{2}\right\}$
b. $\left\{x : \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ y : -\frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{2}\right\}, \left\{x : \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2},\ y : \frac{\sqrt{2}\sqrt[4]{3}}{2}\right\}$

REZULTATI NALOGE 6. $\mathcal{N}$

$\sin(\alpha) = \frac{2\sqrt{5}}{5}$ $\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{5}}{5}$

REZULTATI NALOGE 7. $\mathcal{N}$

$1 \leq c \wedge c \leq 2$

Rešitve: Enačbe in neenačbe

POGLAVJE 2

Kompleksna števila

NALOGA 8. $\mathcal{OR}$

Kompleksno število $z = \frac{1+5i}{1-i}$ zapiši v obliki $z = x + iy$ in izračunaj $|z|$.

NALOGA 9. $\mathcal{OR}$

Poišči vse kompleksne rešitve spodnjih (ne)enačb, tj. opiši ali skiciraj množico rešitev v $\mathbb{C}$.

a. $2\bar{z} - z^2 = 0$,
b. $\operatorname{Im}\left(\frac{1}{z}\right) = 1$,
c. $\operatorname{Re} z + \operatorname{Im} z^2 = 2$,
d. $2z^2 - 3\bar{z}^2 = 10i$,
e. $z^2 + (3-1)z = 2i - 2$,
f. $\bar{z} - iz^2 = 0$,
g. $|z - 3 + 2i| = 4$,
h. $|z + i| < |z - 1|$,
i. $|z - 1| + |z + 1| = 4$.

NALOGA 10. $\mathcal{OR}$

V kompleksni ravnini skiciraj množice rešitev spodnjih neenačb:

a. $|\bar{z} + 2 - i| \leq 2$,
b. $\operatorname{Re}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$,
c. $\operatorname{Im}(\bar{z} + 2 - i) \leq 2$.

NALOGA 11. $\mathcal{OR}$

Kaj naj velja za število $a \in \mathbb{R}$, da bo imela enačba $z^2 + 2z - 3 + a = 0$ vsaj eno kompleksno rešitev?

NALOGA 12. $\mathcal{OR}$

Poišči vsaj eno enačbo, ki ima za rešitev števila $5 + i$, $5 - i$, $3 + i$ ter $3 - 2i$ in nima drugih rešitev.

NALOGA 13. $\mathcal{OR}$

Prevedi v polarno obliko, nato pa z uporabo Eulerjeve formule izračunaj

a. $\left(-\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\right)^8$,
b. $\left(1 + i\sqrt{3}\right)^{20}$,
c. $(1 - i)^{20}$,
d. $\left(\frac{1+i\sqrt{3}}{1-i}\right)^{20}$.

NALOGA 14. $\mathcal{OR}$

Naj bo $v = 1 + i\sqrt{3}$ in $w = 1 - i$. V kompleksni ravnini $\mathbb{C}$ opazujemo kvadrat z oglišči 1, 3, $3 + 2i$ in $1 + 2i$.

a. V kaj se ta kvadrat preslika s transformacijo $z \mapsto vz + w$?
b. V kaj se kvadrat preslika s transformacijo $z \mapsto v\bar{z} + w$ oz. $z \mapsto \overline{vz + w}$?
c. Poišči kompleksno število t, da bo transformacija $z \mapsto tz$ zasukala kvadrat za kot $\pi/4$ okrog izhodišča $0 \in \mathbb{C}$.
d. Poišči transformacijo $z \mapsto tz + u$, s katero se bo kvadrat zasukal za kot $\pi/4$ okrog svojega težišča.

NALOGA 15. $\mathcal{OR}$
Reši enačbo $z^4 + 4 = 0$, nato pa razstavi polinom $z^4 + 4$ na dva kvadratna faktorja z realnimi koeficienti.

NALOGA 16. $\mathcal{OR}$
Poišči naslednja števila:

a. $\sqrt{1+i}$,
b. $\sqrt[3]{-27+27i}$,
c. $\sqrt[5]{-32i}$,
d. $\sqrt[3]{-1+i\sqrt{3}}$.

Rezultati: Kompleksna števila

REZULTATI NALOGE 8. $\mathcal{N}$

$|z| = \sqrt{13}$

REZULTATI NALOGE 9. $\mathcal{N}$

a. $z =$

REZULTATI NALOGE 10. $\mathcal{N}$

a. notranjost kroga $(x+2)^2 + (y+1)^2 \leq 4$
b. polravnina $x \leq 0$
c. polravnina $y \geq 1$

REZULTATI NALOGE 11. $\mathcal{N}$

$a > 4$

REZULTATI NALOGE 12. $\mathcal{N}$

REZULTATI NALOGE 13. $\mathcal{N}$

REZULTATI NALOGE 14. $\mathcal{N}$

REZULTATI NALOGE 15. $\mathcal{N}$

REZULTATI NALOGE 16. $\mathcal{N}$

a. $\sqrt[4]{2}(e^{i\frac{\pi}{8}})$

Rešitve: Kompleksna števila

POGLAVJE 3

Zaporedja

NALOGA 17. $\mathcal{OR}$

Zaporedje je dano s predpisom

$$a_n = \frac{2n-1}{n+3}.$$

a. Izračunaj nekaj členov in nariši graf zaporedja. Pomagaj si z grafom funkcije $y = \frac{2x-1}{x+3}$.
b. Ali je zaporedje naraščajoče, padajoče? Prepričaj se z računom.
c. Prepričaj se, da je zaporedje konvergentno in izračunaj njegovo limito a. Od katerega n dalje ležijo vsi členi tega zaporedja znotraj intervala $\left(a - \frac{1}{4}, a + \frac{1}{4}\right)$

NALOGA 18. $\mathcal{OR}$

Zaporedje (a_n) je dano rekurzivno

$$a_0 = 3,\, a_{n+1} = \sqrt{2 + a_n}.$$

a. Preveri, da je zaporedje (a_n) padajoče in velja $a_n \geq 2$ za vsako naravno število n.
b. Koliko je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$?

NALOGA 19. $\mathcal{OR}$

Rekurzivno zaporedje (a_n) je dano z

$$a_0 = 2,\, a_{n+1} = \frac{1}{2 + a_n}.$$

a. Zapiši prve 3 člene tega zaporedja; a_0, a_1 in a_2.
b. Prepričaj se, da je zaporedje členov z lihimi indeksi (a_{2k+1}) naraščajoče.
c. Poišči limito zaporedja (a_n).

NALOGA 20. $\mathcal{OR}$

Približke za korene pozitivnih števil lahko računamo z zaporedjem podanim z rekurzivno formulo

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{x}{a_n}\right).$$

Prepričaj se, da je $\lim_{n\to\infty} a_n = \pm\sqrt{x}$, če je zaporedje $\{a_n\}$ konvergentno in izračunaj 3 decimalke natančen približek za $\sqrt{2}$.

NALOGA 21. $\mathcal{OR}$

Izračunaj spodnje limite:

a. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n-1}$,
b. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+2n+2}{1-2n^2}$,
c. $\lim\limits_{n\to\infty} \left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right)$,
d. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2^{n+1}+3^n}{2^n-3^{n-1}}$,
e. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{2^n+2}}{2^n+1}$,
f. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt{4^n+4}}{2^n+1}$.

Rezultati: Zaporedja

Rešitve: Zaporedja

POGLAVJE 4

Vrste

NALOGA 22. $\mathcal{OR}$

Naj bo (a_n) zaporedje $a_n = \frac{1}{n(n+1)}$.

a. Poišči $\lim_{n\to\infty} a_n$.
b. S formulo izrazi N-to delno vsoto vrste

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)},$$

tj. $S_N = a_1 + a_2 + \cdots + a_N$. (*Namig:* Zapiši $\frac{1}{n(n+1)}$ kot vsoto parcialnih ulomkov.)

c. Seštej zgornjo vrsto; izračunaj limito delnih vsot $\lim_{N\to\infty} S_N = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$.

NALOGA 23. $\mathcal{OR}$

Izračunaj vsote naslednjih geometrijskih vrst:

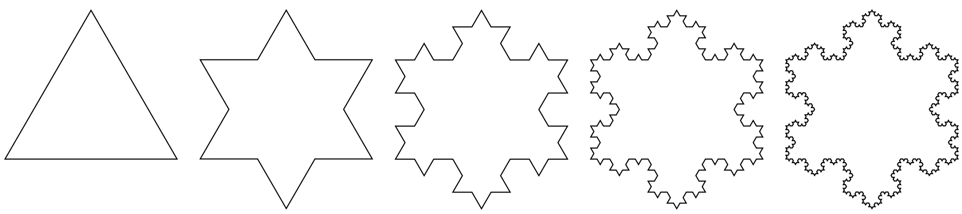
a. $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{4^n}$
b. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10}{3^n}$
c. $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2^n}{3^{2n-1}}$
d. $\displaystyle\frac{3}{2} + 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \ldots$
e. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3 \cdot 2^{3n-2}}$
f. $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^{3n}$, za tiste $x \in \mathbb{R}$, za katere vrsta konvergira.

NALOGA 24. $\mathcal{OR}$

Kateri racionalni ulomek ima decimalni zapis $0.\overline{12} = 0.121212\ldots$? Pomagaj si s primerno geometrijsko vrsto.

NALOGA 25. $\mathcal{OR}$

Kochova snežinka je fraktal, ki ga dobimo z zaporedjem iteracij kot na spodnji sliki.



$n = 0$ $\quad$ $n = 1$ $\quad$ $n = 2$ $\quad$ $n = 3$ $\quad$ $n = 4$

Recimo, da začnemo z enakostraničnim trikotnikom (pri $n = 0$) s stranico dolžine a. Poišči geometrijski vrsti, ki določata ploščino in obseg Kochove snežinke. Seštej ti dve vrsti! Kolikšni sta ploščina in obseg izraženi z a?

Rezultati: Vrste

Rešitve: Vrste

POGLAVJE 5

Funkcije

NALOGA 26. $\mathcal{OR}$

Poišči predpise za inverze, $f^{-1}(x)$, spodnjih funkcij. Na katerih območjih v $\mathbb{R}$ imajo ti predpisi smisel?

a. $f(x) = \dfrac{x+1}{2x-3}$,
b. $g(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$,
c. $h(x) = \log(2x-1)$,
d. $k(x) = \sqrt{x^2+1}$.

NALOGA 27. $\mathcal{OR}$

Skiciraj grafe in poišči definicijska območja funkcij s spodnjimi predpisi. Katera od teh funkcij je soda oz. liha? Katera od funkcij je injektvna/surjektivna? Zakaj je oz. zakaj ni?

a. $3-2x^2$,
b. $\mathrm{sign}(3-2x^2)$,
c. $6-5x+x^2$,
d. e^x+2,
e. $\log(x+2)$,
f. $\sin(2x)$,
g. $\log(\cos(x))$,
h. $\arctan \frac{x(x-2)}{x^2-1}$.

NALOGA 28. $\mathcal{OR}$

Ali predpisi x, $\sqrt{x^2}$ ter $(\sqrt{x})^2$ predstavljajo iste funkcije?

NALOGA 29. $\mathcal{OR}$

Recimo, da predpisa za *zvezno* funkcijo f ne poznamo, poznamo pa vrednosti $f(t_i)$ pri t_i iz spodnje tabele:

t_i	-2	-1	0	1	2	3
$f(t_i)$	4	-1	-2	1	8	19

Kako bi (približno, vendar smiselno) poiskal ničle te funkcije, tj. poiskal tiste $t \in [-2,3]$, za katere velja $f(t) = 0$? Primerjaj dobljene približke z ničlami funkcije $2x^2+x-2$, ki interpolira dane podatke.

Dodatno: Nalogo reši v Pythonu (glej `https://www.projekt-tomo.si/problem_set/57/`).

NALOGA 30. $\mathcal{OR}$

Določi realni števili a in b tako, da bo funkcija s predpisom

$$f(x) = \begin{cases} 2x+a, & x \le 1 \\ x^2-ax+b, & 1 \le x \le 3 \\ ax, & x \ge 3 \end{cases}$$

zvezna.

NALOGA 31. $\mathcal{OR}$

Določi konstanto a tako, da bo f zvezna funkcija.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\sin(3x)(x-2)}{x}, & x < 0 \\ ax + b, & 0 \leq x \leq 1, \\ 2e^{x-1} - \cos(\pi x). \end{cases}$$

Rezultati: Funkcije

Rešitve: Funkcije

POGLAVJE 6

Odvod

NALOGA 32. $\mathcal{OR}$

Uporabi definicijo odvoda funkcije f v točki x:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

in s pomočjo le-te izračunaj odvod funkcije $f(x) = x^2$.

NALOGA 33. $\mathcal{OR}$

S pomočjo pravil za odvajanje izračunaj odvode naslednjih funkcij spremenljivke x:

a. $x^3 + 5x^2 - 3x + 1$,
b. $\frac{2x^2 - 3}{5x + 1}$,
c. $\frac{x}{\sqrt{x^2 + x}}$,
d. e^{x^2},
e. $\sin(5x)$,
f. $\tan(x)$,
g. $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$,
h. $x^3 \log(-3x)$,
i. $\log(\log(x))$,
j. $\arcsin(\cos(x))$,
k. $\frac{5^x}{3^{x^2}}$,
l. $\sin^2(-3x)$,
m. $\tan\left(\frac{1}{2x^2}\right)$.

NALOGA 34. $\mathcal{OR}$

Poišči odvode naslednjih funkcij spremenljivke x:

a. $\frac{x^3 - x^2}{x^4}$,
b. $\frac{(1-x)^p}{(1+x)^q}$,
c. $\frac{\sin(x) + \cos(x)}{\sin(x) - \cos(x)}$,
d. $x\sqrt{x + x^2}$,
e. $\sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$,
f. $\frac{\tan(x)}{x}$,
g. $\frac{x}{\sin^2\left(\frac{1}{x}\right)}$,
h. $\frac{1 + \log(x)}{1 - \log(x)}$,
i. $x^2 e^{\frac{1}{x}}$,
j. $\frac{\log(\sin(x))}{\log(\cos(x))}$,
k. $\log(\log^2(\log^3(x)))$,
l. $x \cdot \arcsin\sqrt{\frac{x^2}{1+x}}$,
m. $\arctan\left(\frac{2x-1}{\sqrt[3]{x+e^{2x}}}\right)$.

NALOGA 35. $\mathcal{OR}$

Funkcija f ima predpis

$$f(x) = x^3 - 2x^2 + 3.$$

Poišči enačbo tangente na graf te funkcije v točki $(1, f(1))$ ter enačbo normale na graf v točki $(2, f(2))$. (Normala je premica, ki je pravokotna na tangento v dani točki.) V kateri točki se ti dve premici sekata?

NALOGA 36. $\mathcal{OR}$

Poišči tangento na graf funkcije f v točki $(x_0, f(x_0))$ za:

a. $f(x) = x^3 - x + 1$, $x_0 = 0$,

b. $f(x) = \log\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$, $x_0 = 1$.

NALOGA 37. $\mathcal{OR}$
Poišči tisto normalo na graf funkcije $y = x\log(x)$, ki je pravokotna na premico z enačbo $y = x - 3$.

NALOGA 38. $\mathcal{OR}$
Na krivulji z enačbo $y = x^2 + 1$ poišči presečišče med tangento v točki $x_0 = 1$ in normalo v točki $x_0 = 2$.

NALOGA 39. $\mathcal{OR}$
V katerih točkah je tangenta na graf spodnjih funkcij vzporedna z x-osjo?

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$,

b. $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

NALOGA 40. $\mathcal{OR}$
Z uporabo totalnega diferenciala določi približno vrednost spodnjih izrazov:

a. $\arctan(0.03)$,

b. $\sqrt{4.1}$,

c. $\sqrt[3]{25}$,

d. $\log(0.9)$.

NALOGA 41. $\mathcal{OR}$
Izboljšaj natančnost izračuna $\log(0.9)$ iz prejšnje naloge z uporabo Taylorjevega polinoma 2., 3. in 4. reda. Za koliko se izboljša natančnost rezultata?

NALOGA 42. $\mathcal{OR}$
Poišči stacionarne točke spodnjih funkcij spremenljivke x. Na katerih intervalih funkciji naraščata?

a. $f(x) = x^3 - 2x^2 + x + 2$,

b. $g(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

NALOGA 43. $\mathcal{OR}$
Za naslednje funkcije določi lokalne ekstreme ter intervale naraščanja in padanja in čimbolj natančno skiciraj njihove grafe.

a. $h(x) = \frac{x}{1+x^2}$,

b. $k(x) = x - 2\arctan(x)$,

c. $p(x) = x^2 e^{-x^2}$,

d. $q(x) = \frac{e^{-2/x^2}}{x}$.

NALOGA 44. $\mathcal{OR}$
Poišči točko na grafu funkcije $f(x) = \sqrt{x^2 + 4x + 7}$, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču $(0,0)$.

NALOGA 45. $\mathcal{OR}$
Med vsemi enakokrakimi trikotniki z danim obsegom O, poišči tistega, ki ima največjo ploščino.

NALOGA 46. $\mathcal{OR}$
Poišči točko na krivulji $y = \sqrt{x^2 + 3x + 4}$, ki je najbližja koordinatnemu izhodišču $(0,0)$.

NALOGA 47. $\mathcal{OR}$
Iz lesene krogle s polmerom R želimo izrezkati valj z največno možno prostornino. Kolikšen bo polmer tega valja?

NALOGA 48. $\mathcal{OR}$
Izdelati želimo *optimalno* valjasto pločevinko.

a. *Optimalno* naj za nas pomeni, da želimo pri dani prostornini V porabiti čimmanj pločevine. Kolikšno naj bo razmerje med višino in premerom osnovne ploskve valja, da bomo to dosegli?

b. Valjasto pločevinko želimo utrditi. V ta namen bomo plašč izdelali iz ene plasti pločevine, obe osnovni ploskvi pa iz dveh plasti pločevine. Kolikšno naj bo v tem primeru razmerje med višino in premerom osnovne ploskve, da bomo pri dani prostornini V porabili čimmanj pločevine?

NALOGA 49. $\mathcal{OR}$

Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zavzame funkcija $f(x) = 3x^5 - 5x^3$ na intervalu $[-\frac{4}{3}, 2]$.

NALOGA 50. $\mathcal{OR}$

Poišči največjo in najmanjšo vrednost, ki jo zavzame funkcija $f(x) = x^3 - 3x + 3$ na intervalu $[-\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]$.

NALOGA 51. $\mathcal{OR}$

Z uporabo l'Hopitalovega pravila izračunaj naslednje limite:

a. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{\log(x)}{x}$,

b. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin(x)}$,

c. $\lim\limits_{x\to 0+} \sin(x)\log(x)$,

d. $\lim\limits_{x\to\infty} x \sin\left(\dfrac{3}{x}\right)$.

Rezultati: Odvod

Rešitve: Odvod

Del 2

Linearna algebra

POGLAVJE 7

Vektorji

NALOGA 52. $\mathcal{OR}$

Naj bo $ABCD$ paralelogram, kjer je $A(1,-2)$, $B(2,1)$ in $C(-2,0)$. Poišči koordinate točke D in izračunaj dolžini obeh diagonal v tem paralelogramu.

NALOGA 53. $\mathcal{OR}$

Naj bo $ABCD$ paralelogram. Razpolovišče stranice CD označimo z E, P pa naj bo točka, v kateri se sekata diagonala AC in daljica BE.

a. Označimo z $\vec{a}$ in $\vec{b}$ vektorja $\overrightarrow{AB}$ in $\overrightarrow{AD}$. Izrazi vektor $\overrightarrow{AP}$ kot linearno kombinacijo vektorjev $\vec{a}$ in $\vec{b}$, tj. poišči realni števili s in t, da bo $\overrightarrow{AP} = s\vec{a} + t\vec{b}$.
b. Kolikšno je razmerje med ploščinama trikotnikov $\triangle ABP$ in $\triangle BCP$?
c. Recimo, da poznamo koordinate oglišč A, B in D:

$$A(1,0,1), B(4,-3,4), D(1,3,1).$$

Določi koordinate oglišča C in točke P. Kolikšna je v tem primeru ploščina trikotnika $\triangle ABP$?
d. Ali je paralelogram iz prejšnje točke romb? Pravokotnik? Mogoče celo kvadrat?

NALOGA 54. $\mathcal{OR}$

Za vektorje $\vec{a}, \vec{b}$ in $\vec{c}$ grafično predstavi naslednje enačbe.

a. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$
b. $\vec{a} = \vec{c} - \vec{b}$
c. $\vec{b} = \vec{c} - \vec{a}$
d. $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} = 0$

NALOGA 55. $\mathcal{OR}$

Za vektorje $\vec{AB}$, $\vec{r}_A$ in $\vec{r}_B$ izpelji, kako se izražajo drug z drugim in dobljene enakosti grafično predstavi.

NALOGA 56. $\mathcal{OR}$

V rombu z oglišči $ABCD$ označimo z E točko na razpolovišču stranice BC in z F točko na razpolovišču stranice CD. Naj bo P točka, v kateri se sekata daljici BF in DE.

a. Kolikšno je razmerje med dolžinama daljic DP in PE?
b. Prepričaj se, da točka P leži na diagonali AC. V kolikšnem razmerju ta točka deli diagonalo?

NALOGA 57. $\mathcal{OR}$

Dana sta vektorja $\vec{a} = [1,1]^{\mathsf{T}}$ in $\vec{b} = [-\sqrt{3},1]^{\mathsf{T}}$. Določi kot med njima in poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{a}$ na vektor $\vec{b}$.

NALOGA 58. $\mathcal{OR}$

Dan je paralelogram $ABCD$ z oglišči $A(-3,-2,0)$, $B(3,-3,1)$, $C(5,0,2)$.

a. Določi oglišče D in presečišče diagonal.
b. Izračunaj dolžini stranic paralelograma $ABCD$ in kot med njegovima diagonalama.
c. Izračunaj ploščino paralelograma $ABCD$.

NALOGA 59. $\mathcal{OR}$

a. Izračunaj kot med vektorjema $\vec{a} = [2, -2, 4]^\top$ in $\vec{b} = [2, 4, -2]^\top$.
b. Kolikšna je ploščina trikotnika, ki ga ta dva vektorja določata?
c. Poišči pravokotno projekcijo vektorja $\vec{b}$ na vektor $\vec{a}$ in še vektor, ki v danem trikotniku predstavlja višino na $\vec{a}$.

NALOGA 60. $\mathcal{OR}$
Poišči vektor $\vec{a}$, ki je pravokoten na vektorja $\vec{b} = [4, 1, 9]^\top$ in $\vec{c} = [-2, 2, 3]^\top$ in ima dolžino 7.

NALOGA 61. $\mathcal{OR}$
Dane so točke $A(1, 0)$, $B(2, 1)$ in $C(0, 2)$. Izračunaj ploščino trikotnika $\triangle ABC$ na dva načina: s formulo $p = \frac{1}{2}a \cdot v_a$ in z vektorskim produktom.

NALOGA 62. $\mathcal{OR}$
Dane so točke $A(1, 1, 2)$, $B(1, 4, -1)$, $C(3, 3, 2)$ in $D(4, -1, 4)$.

a. Izračunaj četrto oglišče paralelograma, ki je napet na vektorja AB in AC.
b. Izračunaj prostornino paralelepipeda, ki je napet na vektorje AB, AC in AD.
c. Izračunaj prostornino piramide $ABCD$.

NALOGA 63. $\mathcal{OR}$
Določite parameter t tako, da vektorja $[t + 5, t, \sqrt{3}]^\top$ in $[0, 1, 0]^\top$ oklepata kot $\pi/3$.

NALOGA 64. $\mathcal{OR}$
Dane so točke $A(2, -3)$, $B(9, 1)$ in $C(5, 6)$. Poišči točko D, tako da bo $ABCD$ deltoid. Izračunaj ploščino tega deltoida.

Rezultati: Vektorji

REZULTATI NALOGE 52. $\mathcal{N}$

$D = (-3, -3)$, $\|AC\| = \sqrt{13}$, $\|BD\| = \sqrt{41}$.

REZULTATI NALOGE 53. $\mathcal{N}$

a. $\overrightarrow{AP} = \frac{2}{3}(\vec{a} + \vec{b})$.
b. 2:1
c. $C(4, 0, 4)$, $P(3, 0, 3)$, $S(\triangle ABP) = 3\sqrt{2}$.
d. Nič od tega.

Rešitve: Vektorji

REŠITEV NALOGE 52. $\mathcal{N}$

Tule bo nekaj pisalo. $x = 3$.

POGLAVJE 8

Geometrija v prostoru

NALOGA 65. $\mathcal{OR}$

Dane so točke $A(3,2,0)$, $B(2,1,2)$ in $C(4,1,6)$.

a. Določi premico p skozi točki A in B. Premico zapiši v parametrični in implicitni obliki.
b. Ali so točke A, B in C kolinearne?
c. Poišči točko D na premici p, tako da bo vektor $\overrightarrow{CD}$ pravokoten na p. Nato določi razdaljo med točko C in premico p.
d. Poišči zrcalno sliko C' pri zrcaljenju točke C čez premico p.
e. Poišči točki P, Q na premici p, tako da bo $CPC'Q$ kvadrat.

NALOGA 66. $\mathcal{OR}$

Dane so točke $A(2,-3,6)$, $B(-4,-1,6)$, $C(2,-1,9)$ in $D(1,2,-1)$

a. Poišči enačbo ravnine Σ, ki gre skozi točke A, B in C.
b. Poišči enačbo premice p, ki gre skozi D in je pravokotna na ravnino Σ.
c. Izračunaj presečišče premice p in ravnine Σ.

NALOGA 67. $\mathcal{OR}$

Dane so točke $A(1,0,-3)$, $B(-1,0,1)$, $C(3,2,0)$ in $D(4,2,-2)$.

a. Prepričaj se, da vse štiri ležijo na isti ravnini. Poišči enačbo te ravnine.
b. Naj bo p premica, ki gre skozi A in C, q pa premica, ki gre skozi B in D. Ali se ti dve premici sekata? Kolikšen je kot med njima?

NALOGA 68. $\mathcal{OR}$

Dane so točke $A(2,3,1)$ $B(1,-1,1)$, $C(2,1,3)$ in $D(9,0,-4)$.

a. Določi enačbo ravnine Σ, ki gre skozi točke A, B in C.
b. Poišči ravnino skozi točko D, ki je vzporedna ravnini Σ.
c. Določi razdaljo med ravnino Σ in točko D. Poišči še zrcalno sliko D' pri zrcaljenju točke D čez Σ.

NALOGA 69. $\mathcal{OR}$

Ravnina Σ_1 ima normalni vektor $\vec{n}_1 = [1,0,-3]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_1(1,2,3)$, ravnina Σ_2 pa normalni vektor $\vec{n}_2 = [2,2,0]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_2(0,-2,1)$. Ravnina Σ_3 ima enačbo $z = 1$. Poišči točko, v kateri se te tri ravnine sekajo.

NALOGA 70. $\mathcal{OR}$

Dane so točke $A(1,0,0)$, $B(2,1,1)$, $C(1,-2,1)$ in $D(2,1,2)$. Poišči točko P na premici AB in točko Q na premici CD, tako da bo vektor $\overrightarrow{PQ}$ pravokoten tako na premico AB kot na premico CD. Nato določi razdaljo med premicama AB in CD.

NALOGA 71. $\mathcal{OR}$

(Raytracing) Dane so točke $A(1,0,6)$, $B(1,2,5)$, $C(0,5,4)$, $T_0(1,1,-2)$ in $T(2,0,1)$. Ali poltrak T_0T preseka ravnino skozi točke A, B in C? Če poltrak predstavlja svetlobni žarek, kam se odbije od ravnine?

NALOGA 72. $\mathcal{OR}$

Ali točka $T(0,1,-1)$ leži znotraj trikotnika $\triangle ABC$ z oglišči $A(1,0,1)$, $B(2,-1,1)$ in $C(-2,3,-4)$?

a. Poišči ravnino trikotnika $\triangle ABC$. Ali točka T leži na tej ravnini?
b. Poišči ravnino Σ_{AB}, ki gre skozi točki A in B in je pravokotna na ravnino trikotnika $\triangle ABC$.
c. Ali sta točki T in C na isti strani ravnine Σ_{AB}.
d. Ponovi zgornje za para točk A, C in B, C.

NALOGA 73. $\mathcal{OR}$

Ravnina R je dana z enačbo $x + y - z = 2$.

a. S čim manj računanja ugotovi ali daljica AB s krajišči $A(2,1,-1)$ in $B(-2,1,1)$ seka ravnino R?
b. Zapiši premico skozi točki A in B v parametrični obliki in izračunaj presečišče premice z ravnino R.
c. Kako lahko ugotoviš, ali je presečišče na daljici AB?

Rezultati: Geometrija v prostoru

Rešitve: Geometrija v prostoru

POGLAVJE 9

Sistemi linearnih enačb

NALOGA 74. $\mathcal{OR}$

Zapiši naslednje sisteme v matrični obliki in z uporabo Gaussove eliminacije poišči vse rešitve:

a. $\begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ 2x & - & y & + & 4z & = & 0 \\ 3x & - & y & + & z & = & 1 \end{array}$ b. $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & y & - & z & = & 0 \\ x & & & + & z & = & 5 \\ x & + & y & - & 2z & = & -5 \end{array}$ c. $\begin{array}{rcrcrcr} & & 2y & + & z & = & 5 \\ x & - & y & + & 2z & = & 2 \\ x & + & y & + & 3z & = & 1 \end{array}$

Odgovor: (a) $x = 1, y = 2, z = 0$; (b) $x = 5 - t, y = 3t - 10, z = t$, $t \in \mathbb{R}$; (c) ni rešitev.

NALOGA 75. $\mathcal{OR}$

Poišči vse vektorje v $\mathbb{R}^3$, ki so pravokotni na vektor $[1, -1, 3]^\mathsf{T}$.

NALOGA 76. $\mathcal{OR}$

Poišči predpis za kvadratno funkcijo $f(x) = ax^2 + bx + c$, katere graf gre skozi točke $A(-1, 6)$, $B(1, 0)$ in $C(2, 3)$.

NALOGA 77. $\mathcal{OR}$

Določi polmer in središče krožnice, ki gre skozi točke $A(-1, 1)$, $B(0, 2)$ in $C(6, -6)$.

NALOGA 78. $\mathcal{OR}$

Poišči vse vrednosti parametra a, za katere je naslednji sistem rešljiv:

a. $\begin{array}{rcrcrcr} 2x & + & 3y & + & z & = & 7 \\ 3x & + & 7y & - & 6z & = & -2 \\ 5x & + & 8y & + & z & = & a \end{array}$

b. $\begin{array}{rcrcrcr} 4x & + & 7y & + & 4z & = & 5 \\ 4x & + & 2y & + & z & = & 9 \\ 3x & + & y & + & 6z & = & a \end{array}$

c. $\begin{array}{rcrcrcr} 3x & + & 2y & + & 5z & = & 1 \\ 2x & + & 4y & + & 6z & = & 3 \\ 5x & + & 7y & + & az & = & 5 \end{array}$

Odgovor: (a) $a = 15$; (b) $a \in \mathbb{R}$; (c) $a \neq 12$.

NALOGA 79. $\mathcal{OR}$

Z uporabo Gaussove eliminacije poišči vse rešitve naslednjih sistemov enačb:

a.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 2x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & x_4 & = & 4 \\ 4x_1 & + & 3x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \\ 8x_1 & + & 5x_2 & - & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 12 \\ 3x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & + & 2x_4 & = & 6 \end{array}$$

b.

$$\begin{aligned} 2x_1 + 7x_2 + 3x_3 + x_4 &= 5 \\ x_1 + 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= 3 \\ x_1 + 5x_2 - 9x_3 + 8x_4 &= 1 \\ 5x_1 + 18x_2 + 4x_3 + 5x_4 &= 12 \end{aligned}$$

c.

$$\begin{aligned} 4x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 &= 8 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 - 3x_4 &= 7 \\ 2x_1 - x_2 \qquad - 5x_4 &= 6 \\ 5x_1 - 3x_2 + x_3 - 8x_4 &= 1 \end{aligned}$$

d.

$$\begin{aligned} 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 2x_4 &= 3 \\ 6x_1 + 8x_2 + 2x_3 + 5x_4 &= 7 \\ 9x_1 + 12x_2 + 3x_3 + 10x_4 &= 13 \end{aligned}$$

Odgovor: (a) $x_1 = 1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = -1$; (b) $x_1 = 6 - 26s + 17t$, $x_2 = -1 + 7s - 5t$, $x_3 = s$, $x_4 = t$, $t, s \in \mathbb{R}$; (c) ni rešitev; (d) $x_1 = s, x_2 = t, x_3 = 1 - 3s - 4t, x_4 = 1, s, t \in \mathbb{R}$.

NALOGA 80. $\mathcal{OR}$

Ravnina Σ_1 ima normalni vektor $\vec{n}_1 = [1, 0, -3]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_1(1, 2, 3)$, ravnina Σ_2 pa normalni vektor $\vec{n}_2 = [2, 2, 0]^\mathsf{T}$ in vsebuje točko $T_2(0, -2, 1)$. Ravnina Σ_3 ima enačbo $z = 1$. Poišči točko, v kateri se te tri ravnine sekajo.

NALOGA 81. $\mathcal{OR}$

Poišči koeficiente kubičnega polinoma $p(x) = a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$, ki interpolira tabelo

x	-1	0	1	2
$p(x)$	-4	1	2	5.

Isti polinom poišči še v Newtonovi obliki

$$p(x) = n_0 + n_1(x+1) + n_2(x+1)x + n_3(x+1)x(x-1).$$

NALOGA 82. $\mathcal{OR}$

Racionalno funkcijo

$$r(x) = \frac{x^2 - 2x - 2}{x^3 - x}$$

zapiši kot vsoto parcialnih ulomkov

$$r(x) = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+1}.$$

Premisli, kako bi dobil čim bolj enostaven sistem enačb za A, B in C.

NALOGA 83. $\mathcal{OR}$

Poišči matriko X, da bo veljalo

$$\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} X + X \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}.$$

Rezultati: Sistemi linearnih enačb

Rešitve: Sistemi linearnih enačb

POGLAVJE 10

Matrike in determinante

NALOGA 84. $\mathcal{OR}$

Imamo matrike

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ in } C = \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

a. Izračunaj naslednje produkte matrik, če je to mogoče.

$$AB, BA, BC, CB, (B+C)A, A^\mathsf{T} A \text{ in } AA^\mathsf{T}.$$

b. Izračunaj B^2 in B^3.

c. Naj bo n naravno število. Kako se elementi matrike B^n izražajo z n?

NALOGA 85. $\mathcal{OR}$

Imamo matriko

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

in vektorje

$$a = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ in } b = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}.$$

Izračunaj naslednje produkte, če je to mogoče

$$Aa, aA, a^\mathsf{T} A, A(a+b), ab, ab^\mathsf{T}, a^\mathsf{T} b, A^\mathsf{T} Aa.$$

Rezultati: Matrike in determinante

Rešitve: Matrike in determinante

Literatura

[1] O. Cornea, G. Lupton, J. Oprea, D. Tanré, *Lusternik-Schnirelmann Category*, AMS, Mathematical Surveys and Monographs, vol. **103** (2003).