1. naloga (7 točk)

Vrtnar prodaja dve vrsti sadik paprike. Višina sorte A je normalno porazdeljena s povprečjem 20 cm in standardnim odklonom 3 cm, višina sorte B pa je porazdeljena normalno s povprečjem 25 cm in standardnim odklonom 5 cm.

a) (2 točki) Ana kupi 9 sadik sorte A. Izračunaj verjetnost, da je povprečna višina njenih sadik večja od 21 cm.

$$X_1, \dots, X_9 \sim N(20, 3)$$

$$\overline{X} = \frac{X_1 + \dots + X_9}{9} \sim N\left(20, \frac{3}{\sqrt{9}}\right) = N(20, 1)$$

$$P(\overline{X} > 21) = 1 - P(\overline{X} \leq 21) = 1 - \Phi\left(\frac{21-20}{1}\right) = 1 - \Phi(1) = 1 - 0{,}8413 = \underline{\underline{0{,}1587}}$$

b) (2 točki) Brane kupi 16 sadik sorte B. Izračunaj verjetnost, da je povprečna višina njegovih sadik med 20 in 25 cm.

$$Y_1, \dots, Y_{16} \sim N(25, 5)$$

$$\overline{Y} = \frac{Y_1 + \dots + Y_{16}}{16} \sim N\left(25, \frac{5}{\sqrt{16}}\right) = N(25, 1.25)$$

$$P(20 < \overline{Y} < 25) = P(\overline{Y} < 25) - P(\overline{Y} \leq 20) = \Phi\left(\frac{25-25}{1.25}\right) - \Phi\left(\frac{20-25}{1.25}\right) =$$

$$= \Phi(0) - \Phi(-4) = \Phi(0) - \underbrace{(1 - \underbrace{\Phi(4)}_{1})}_{0} = \Phi(0) = \underline{\underline{0{,}5}}$$

c) (3 točke) Cene kupi 1 sadiko sorte A in 1 sadiko sorte B. Kolikšna je verjetnost, da je skupna dolžina njegovih sadik vsaj 50 cm?

$$X \sim N(20, 3)$$

$$Y \sim N(25, 5)$$

$$X + Y \sim N\left(20 + 25, \sqrt{3^2 + 5^2}\right) = N(45, \sqrt{34})$$

$$P(X + Y \geq 50) = 1 - P(X + Y \leq 50) = 1 - \Phi\left(\frac{50-45}{\sqrt{34}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{5}{\sqrt{34}}\right) = 1 - \Phi(0{,}86) =$$

$$= 1 - 0{,}8051 = \underline{\underline{0{,}1949}}$$

2. naloga (7 točk)

Lan je napisal računalniški program, ki iz seznama 5 samoglasnikov, 20 soglasnikov in 5 ločil naključno izbere 2 znaka. Pri tem se izbrani znaki lahko ponavljajo. V slučajno spremenljivko X nato zapiše število izbranih samoglasnikov, v Y pa število izbranih znakov, ki so črke (torej število vseh, ki niso ločila).

a) (2 točki) Zapiši porazdelitveno tabelo za slučajni vektor (X, Y) in določi obe robni porazdelitvi.

X = št. samoglasnikov med izbranima 2 znakoma $\in \{0,1,2\}$
Y = št. črk -11- $\in \{0,1,2\}$

0 črk $\Rightarrow$ 0 samogl. $\longrightarrow$ $Y=0 \Rightarrow X=0$

$P(X=1, Y=0) = P(X=2, Y=0) = 0$

$P(X=2, Y=1) = P(1 \text{ črka}, 2 \text{ samog.}) = 0$

$P(X=0, Y=0) = P(2 \text{ ločili}) = \frac{5\cdot 5}{30\cdot 30} = \frac{25}{900}$

$P(X=0, Y=1) = P(1 \text{ sogl.}\ 1 \text{ loč.}) = \frac{2\cdot 20\cdot 5}{30\cdot 30} = \frac{200}{900}$

$P(X=0, Y=2) = P(2 \text{ sogl.}) = \frac{20\cdot 20}{30\cdot 30} = \frac{400}{900}$

$P(X=2, Y=2) = P(2 \text{ samog.}) = \frac{5\cdot 5}{30\cdot 30} = \frac{25}{900}$

$P(X=1, Y=1) = P(1 \text{ samo } 1 \text{ loč}) = \frac{2\cdot 5\cdot 5}{30\cdot 30} = \frac{50}{900}$

$P(X=1, Y=2) = P(1 \text{ samo } 1 \text{ sog}) = \frac{2\cdot 5\cdot 20}{900} = \frac{200}{900}$

XY

	$X=0$	$X=1$	$X=2$	
$Y=0$	$\frac{25}{900}$ $\lfloor 0$	0 $\lfloor 0$	0 $\lfloor 0$	$\frac{25}{900}$
$Y=1$	$\frac{200}{900}$ $\lfloor 0$	$\frac{50}{900}$ $\lfloor 1$	0 $\lfloor 2$	$\frac{250}{900}$
$Y=2$	$\frac{400}{900}$ $\lfloor 0$	$\frac{200}{900}$ $\lfloor 2$	$\frac{25}{900}$ $\lfloor 4$	$\frac{625}{900}$
	$\frac{625}{900}$	$\frac{250}{900}$	$\frac{25}{900}$	1

$$X \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{625}{900} & \frac{250}{900} & \frac{25}{900} \end{pmatrix} \qquad Y \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ \frac{25}{900} & \frac{250}{900} & \frac{625}{900} \end{pmatrix}$$

b) (2 točki) Izračunaj $\mathrm{Cov}(X, Y)$.

$$E(X) = \frac{250}{900} + \frac{50}{900} = \frac{300}{900} = \frac{1}{3} \qquad E(Y) = \frac{250}{900} + \frac{1250}{900} = \frac{1500}{900} = \frac{15}{9} = \frac{5}{3}$$

$$XY \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 4 \\ \dots & \frac{50}{900} & \frac{200}{900} & \frac{25}{900} \end{pmatrix} \qquad E(XY) = \frac{50+400+100}{900} = \frac{550}{900} = \frac{55}{90} = \frac{11}{18}$$

$$\mathrm{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{11}{18} - \frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3} = \frac{11-10}{18} = \frac{1}{18} = 0{,}0556$$

c) (1 točka) Ali sta slučajni spremenljivki X in Y neodvisni? Ali sta nekorelirani?

$P(X=2, Y=0) = 0 \neq P(X=2)\cdot P(Y=0) = \frac{25}{900}\cdot\frac{25}{900} \Rightarrow$ nista neodvisni

$\mathrm{Cov}(X,Y) \neq 0 \Rightarrow r(X,Y) \neq 0 \Rightarrow$ nista nekorelirani

d) (3 točke) Denimo, da sta X in Y neodvisni eksponentni slučajni spremenljivki, $X \sim \mathrm{Exp}(2)$, $Y \sim \mathrm{Exp}(2)$. Kako je v tem primeru porazdeljena vsota $X+Y$? Poimenuj porazdelitev in zapiši gostoto verjetnosti $p_{X+Y}(x)$. Kako pridemo do te funkcije? (Ni je potrebno dejansko izračunati – le vstavi podatke v ustrezno formulo, ki smo jo uporabili za računanje.)

$$\left.\begin{aligned} X &\sim \mathrm{Exp}(2) = \Gamma(1,2) \\ Y &\sim \mathrm{Exp}(2) = \Gamma(1,2) \end{aligned}\right\} X+Y \sim \underline{\Gamma(\overset{k}{2},\overset{\lambda}{2})} \qquad \text{gama porazdelitev}$$

$$p_{X+Y}(x) = \begin{cases} 4xe^{-2x}; & x \geq 0 \\ 0; & \text{sicer} \end{cases}$$

$$\frac{\lambda^k}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-\lambda x} = \frac{4}{1} x^1 e^{-2x} = 4xe^{-2x}$$

$k=2, \lambda=2, \Gamma(2)=1!=1$

3. naloga (8 točk)

Ker je imela igralnica s prejšnjo igro precej uspeha, si je zamislila še eno podobno. Tokrat pri vsaki igri igralec vrže dve neodvisni pošteni kocki.

a) (2 točki) Igralec dobi igro natanko takrat, ko je vsota pik pri metu dveh kock deljiva s 4. Določi verjetnost, da igralec dobi igro.

$$P(A) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4} = 0{,}25$$

A

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

b) (2 točki) Vsaka igra stane 1 žeton, igralec pa dobi nazaj poleg svojega vložka še 1 žeton, če zmaga v igri, sicer pa vloženi žeton izgubi. Naj bo slučajna spremenljivka X število žetonov, ki jih dobi igralnica, ko igralec odigra eno igro. Izračunaj $E(X)$, $D(X)$ in $\sigma(X)$.

$$X \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} \qquad X^2 \sim \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$E(X) = \frac{3}{4} - \frac{1}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$D(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

$$\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \frac{\sqrt{3}}{2} \doteq 0{,}8660$$

c) (2 točki) Naj slučajna spremenljivka S meri dobiček igralnice po 100 igrah. Kako je porazdeljen S? Poimenuj porazdelitev in določi vse parametre!

$$S = X_1 + \cdots + X_{100} \sim N(\mu, \sigma) \quad \text{normalna}$$

$$\mu = 100 \cdot E(X_i) = 100 \cdot \frac{1}{2} = 50$$

$$\sigma = \sqrt{100} \cdot \sigma(X_i) = 10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 5\sqrt{3} \doteq 8.66$$

$$S \,\dot{\sim}\, N(50, 5\sqrt{3})$$

d) (2 točki) Če se igralec zaveže, da bo igral 100 iger, mu igralnica ponudi 20 brezplačnih žetonov. Kolikšna je verjenost, da bo igralnica po teh 100 igrah še vedno v plusu? (*Upoštevaj, da igralec igra točno* 100 *iger in pri uporabi centralnega limitnega izreka ne pozabi na popravek za zveznost.*)

$$P(S > 20) = 1 - P(S \le 20) = 1 - P(S < 21) = 1 - \Phi\left(\frac{20.5 - 50}{5\sqrt{3}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{-29.5}{5\sqrt{3}}\right) =$$

$$= 1 - \left(1 - \Phi\left(\frac{29.5}{5\sqrt{3}}\right)\right) = \Phi(3.41) = 0{,}9997$$